

Problème: (Polynésie 2013)

15,5

Total/10 → 10

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013. En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n -ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n -ième année après 2013.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

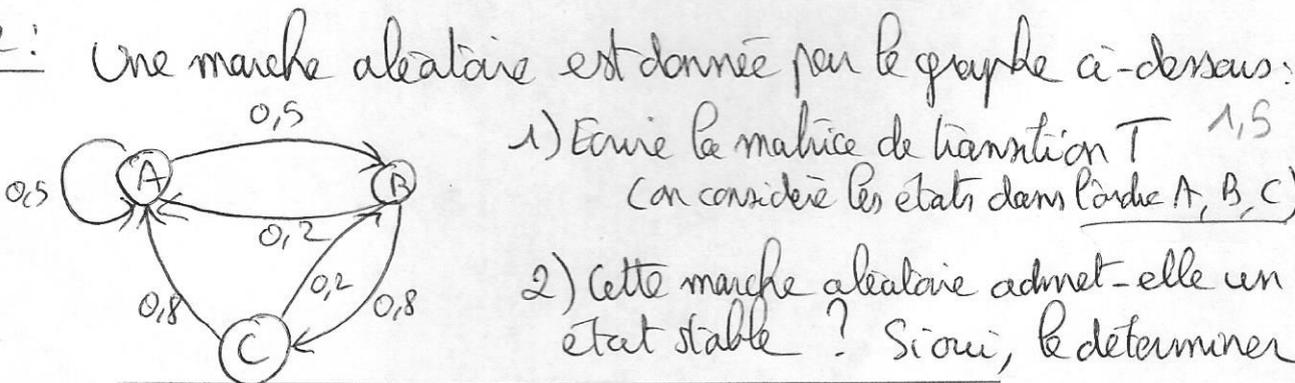
- 0,5 1. a. Déterminer U_1 .
- 0,5 b. Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = M \times U_n + P$.
- 2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 0,5 a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- 0,5 b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.
- 0,5 c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.
- 3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.
- 0,5 a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = M \times V_n$.
- 1 b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $V_n = M^n \times V_0$.
- 4. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

- 1 a. Pour tout entier naturel n , exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n) .
- 0,5 b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Exercice :

4,5



- 1) Écrire la matrice de transition T (on considère les états dans l'ordre A, B, C)
- 2) Cette marche aléatoire admet-elle un état stable ? Si oui, le déterminer