

(1)

Problème: 6,5

$$1) a) U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

b) Satm EM:

$$\underline{M \times U_n + P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

$$2) a) \underline{(I-M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1-0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 1-0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (0,5) \\ = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2-0,2 & 0,6-0,6 \\ -0,4+0,4 & -0,2+1,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{I}$$

b) On a montré dans la question 2a) que: $(I-M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$
donc $I-M$ est inversible (on a aussi $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times (I-M) = I$)

$$\text{et } \underline{(I-M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \quad (0,5)$$

$$c) U = M \times U + P \Leftrightarrow U - M \times U = P \Leftrightarrow (I-M) \times U = P \\ \Leftrightarrow U = (I-M)^{-1} \times P$$

$$\text{D'où } U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \times 60 + 2 \times 70 \\ 1 \times 60 + 3 \times 70 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}} \quad (0,5)$$

3) Satm EM: on pose $V_n = U_n - U$

$$a) V_{n+1} = U_{n+1} - U = M \times U_n + P - U = M \times U_n + (I-M) \times U - U \\ = M \times U_n - M \times U = M \times (U_n - U)$$

d'où $V_{n+1} = M \times V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(0,5)

(2)

b) Montrons ce résultat par récurrence:

- Initialisation: $V_0 = \underbrace{M^0}_{\substack{1 \\ I}} \times V_0$ - La propriété est donc initialisée.

- Hérédité: Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = M \times V_n = M \times M^n \times V_0 = M^{n+1} \times V_0$$

(1)

La propriété est héréditaire

Par le principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n \times V_0$

4) $U_n = V_n + U$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

(1)

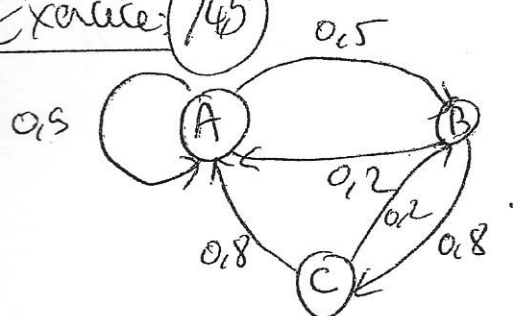
Donc: $a_n = -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

car, $-1 < 0,8 < 1$, d'où $0,8^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, de même, $-1 < 0,5 < 1$
d'où $0,5^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 380$

b) A long terme, l'opérateur A aura 380 000 abonnés (0,5)

Exercice: (1,5)



1) Matrice de transition: T

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1,5)

3) A la calculatrice, calculons $T^2 = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,25 & 0,4 \\ 0,74 & 0,26 & 0 \\ 0,44 & 0,4 & 0,16 \end{pmatrix}$

(3)

Elle possède encore un coefficient nul.

calculons $T^3 = \begin{pmatrix} 0,545 & 0,255 & 0,2 \\ 0,422 & 0,37 & 0,208 \\ 0,428 & 0,252 & 0,32 \end{pmatrix}$

Mais avons donc trouvé une puissance de T ne contenant aucun coefficient nul.

Donc : Cette marche aléatoire admet donc un état stable

Soit $P = (a \ b \ c)$ cet état stable.

On a : $P \times T = P \Leftrightarrow (a \ b \ c) \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} = (a \ b \ c)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5a + 0,2b + 0,8c = a \\ 0,5a + 0,2c = b \\ 0,8b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$

(3)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,5a + 0,2b + 0,8c = 0 \\ 0,5a - b + 0,2c = 0 \\ 0,8b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -0,5a + 0,2b + 0,8c = 0 \\ 0,8b = c \\ 0,5a + 0,5b + 0,5c = 0,5 \end{cases}$

$\begin{cases} -0,5a + 0,2b + 0,8c = 0 \\ 0,7b + 1,3c = 0,5 \\ 0,8b = c \end{cases}$

$\begin{cases} -0,5a + 0,2b + 0,8c = 0 \\ 0,7b + 1,3 \times 0,8b = 0,5 \\ c = 0,8b \end{cases}$

$\begin{cases} -0,5a = -0,2 \times \frac{25}{87} - 0,8 \times \frac{20}{87} = -\frac{5}{87} - \frac{16}{87} = -\frac{21}{87} \\ b = \frac{0,5}{1,74} = \frac{25}{87} \\ c = 0,8 \times \frac{25}{87} = \frac{20}{87} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a = +\frac{14}{29} \\ b = \frac{25}{87} \\ c = \frac{20}{87} \end{cases}$

Nou l'état stable :

$\begin{pmatrix} \frac{14}{29} & \frac{25}{87} & \frac{20}{87} \end{pmatrix}$
 $\approx 0,4828 \quad \approx 0,2874 \quad \approx 0,2295$