Spé Maths Tale S.

Corrigé (Fait le 06/12/16)

1

Partie (A).

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) $u_1 = 10u_0 + 21 = 10 \times 1 + 21 = \underline{31}$

$u_2 = 10u_1 + 21 = 10 \times 31 + 21$
$= \underline{331}$

$u_3 = 10u_2 + 21 = 10 \times 331 + 21$
$= 3310 + 21$
$= \underline{3331}$

b) Conjecture : on a : $u_0 = 1$: 0 chiffre 3 et 1 unité = 1

$u_1 = 31$: 1 chiffre 3 et 1 unité = 1

$u_2 = 331$: 2 chiffres 3 et 1 — - -

Il semblerait que : $u_n = \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ chiffres } 3}1$

2) Montrons cette égalité par récurrence :

- Initialisation : $3u_0 = 3 \times 1 = 3$; $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3$ } d'où $3u_0 = 10^{0+1} - 7$

La propriété est donc initialisée

- Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons-la au rang $n+1$:

$3u_{n+1} = 3 \times (10u_n + 21)$
$= 30u_n + 63$
$= 10 \times 3u_n + 63$
$= 10 \times (10^{n+1} - 7) + 63$ (hypothèse de récurrence).
$= 10^{n+2} - 70 + 63 = 10^{n+2} - 7$ d'où la propriété est héréditaire

~~Donc~~ Comme la propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On a :
$$3u_n = 10^{n+1} - 7$$
$$= 10^{n+1} - 10 + 3$$
$$= 10(10^n - 1) + 3$$

Or, $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} = \dfrac{1-10^n}{1-10} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

d'où $10^n - 1 = 9 \times (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1})$

D'où : $10 \times (10^n - 1) = 9 \times (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n)$

Donc :
$$3u_n = 9 \times (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) + 3$$

c'est-à-dire :
$$u_n = 3 \times (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) + 1$$
$$= \underline{3} \times 10^n + \underline{3} \times 10^{n-1} + \dots + \underline{3} \times 10^3 + \underline{3} \times 10^2 + \underline{3} \times 10 + \underline{1}$$

D'où u_n s'écrit sous la forme suivante : n chiffres 3 et le chiffre des unités $= 1$.

4) Par récurrence :

- Initialisation :

$u_0 = 1$, 1 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5

d'où la propriété est initialisée

- Hérédité :

Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

Montrons-la au rang $n+1$:

$u_{n+1} = 10u_n + 21$ or, $u_n \equiv 1 [2]$

d'où $10u_n \equiv 0 [2]$

et $10u_n + 21 \equiv 1 [2]$

d'où $u_{n+1} \equiv 1 [2]$ c'est-à-dire u_{n+1} pas divisible par 2

~~de~~ $10 \equiv 1 [3]$ et $21 \equiv 0 [3]$

D'où $10u_n + 21 \equiv u_n\ [3]$ (car si $a \equiv b\ [n]$, $c \equiv d\ [n]$, $a+c \equiv b+d\ [n]$ et $a\times c \equiv b\times d\ [n]$) (3)

c'est-à-dire $u_{n+1} \equiv u_n\ [3]$

Comme $u_n \not\equiv 0\ [3]$ alors $u_{n+1} \not\equiv 0\ [3]$ (transitivité de la relation de congruence)

D'où u_{n+1} n'est pas divisible par 3

$10 \equiv 0\ [5]$ et $21 \equiv 1\ [5]$

d'où $10u_n + 21 \equiv 1\ [5]$ c'est-à-dire $u_{n+1} \equiv 1\ [5]$

d'où u_{n+1} n'est pas divisible par 5.

Donc la propriété est héréditaire.

Par conséquent : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$10 \equiv -1\ [11]$$

d'où $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1}\ [11]$ (car si $a \equiv b\ (n)$, alors $a^p \equiv b^p\ [n]$, pour tout $p \in \mathbb{N}$)

$10^{n+1} - 11 \equiv (-1)^{n+1}\ [11]$

or, $3u_n = 10^{n+1} - 7 = 10^{n+1} - 11 + 4$

d'où $3u_n - 4 = 10^{n+1} - 11 \equiv (-1)^{n+1}\ [11]$

d'où $\underline{3u_n} \equiv \underbrace{4 + (-1)^{n+1}}\ [11]$

$4 - (-1)^n\ [11]$

b)

* Si n est pair : $3u_n \equiv 4 - 1\ [11]$
$\equiv 3\ [11]$ ①

* Si n est impair : $3u_n \equiv 4 + 1\ [11]$
$\equiv 5\ [11]$ ②

① $3u_n \equiv 3\ [11]$

d'où $4\times 3u_n \equiv 4\times 3\ [11]$

$12u_n \equiv 12\ [11]$

$\equiv 1\ [11]$

or $12 \equiv 1\ [11]$ d'où $u_n \equiv 1\ [11]$

② $3u_n \equiv 5\ [11]$

$4\times 3u_n \equiv 20\ [11]$

$\equiv 9\ [11]$

d'où $u_n \equiv 9\ [11]$

Donc dans tous les cas $11 \nmid u_n$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $\mathrm{Tr}\, A$ = Somme des elements diagonaux

$= 2+4+(-3)$

$= \boxed{3}$

2) A^T : transposée de A

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

3) $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 2+(-1)\times(-3)+(-2)\times 2 & 2\times(-1)+(-1)\times 4+(-2)\times(-2) & 2\times(-2)+(-1)\times 6+(-2)\times(-3) \\ (-3)\times 2+4\times(-3)+6\times 2 & -3\times(-1)+4\times 4+6\times(-2) & -3\times(-2)+4\times 6+6\times(-3) \\ 2\times 2+(-2)\times(-3)+(-3)\times 2 & 2\times(-1)+(-2)\times 4+(-3)\times(-2) & 2\times(-2)+(-2)\times 6+(-3)\times(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -6 & 7 & 12 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}}$$

4) a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Or : $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $A = I_3 + P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

5

b) $A^2 = (P + I_3)^2 = P^2 + \underline{P I_3 + I_3 P} + I_3^2$

$= 2P + I_3$

$= 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -6 & 7 & 12 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}}$