CORRIGÉ

NOM :...................................... PRENOM :..............................Classe :...................

Fait 6

Terminale S Spé maths	**Contrôle 1 :** Divisibilité/Division euclidienne	Lundi 03 octobre 2016

- Calculatrice autorisée

Exercice 1 : 4

→ initialisation : 1
→ hérédité : 2
→ conclusion : 1

Montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

- Initialisation : Pour $n=0$: $3^{2\times0+1} + 2^{0+2} = 3+4 = 7$ et $7 \mid 7$ d'où la propriété est initialisée

- Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n} \times 3^2 \times 3 + 2^{n+2} \times 2 = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$

$= (3^{2n+1} + 2^{n+2})\underbrace{(9-7)}_{=2} + 7 \times 3^{2n+1}$

$= 2 \times 7k + 7 \times 3^{2n+1}$ ($k \in \mathbb{Z}$) $= 7 \times K$, $K \in \mathbb{Z}$

d'où $7 \mid 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$

La propriété est donc vraie au rang n+1. Elle est donc héréditaire.

Donc : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

Exercice 2 : 3

→ div. euclid : 1
→ Bonne décomp : 1
→ conclusion : 1

On considère le nombre N = 813 en notation décimale. Ecrire N en base 3 **en détaillant les étapes** :

$813 = 3 \times 271 + 0$ $\quad 271 = 3 \times 90 + 1$

$90 = 3 \times 30 + 0$, $\quad 30 = 3 \times 10 + 0$, $\quad 10 = 3 \times 3 + 1$

$3 = 3 \times 1 + 0$

$813 = 3 \times 271 + 0 = 3 \times (3 \times 90 + 1) = 3^2 \times 90 + 3$

$= 3^2 \times 3 \times 30 + 3 = 3^3 \times 30 + 3 = 3^3 \times (3 \times 10) + 3 = 3^4 \times 10 + 3$

$= 3^4 \times 10 + 3 = 3^4 \times (3^2 + 1) + 3 = 3^6 + 3^4 + 3$

$= 1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0$

D'où l'écriture de 813 en base 3 : $\boxed{(1010010)_3}$

Exercice 3 : 6

Déterminer tous les couples (x ;y) d'entiers naturels tels que $4x^2 = y^2 + 15$

→ Facto : 1
→ $2x+y > 2x-y$: 1
→ diviseurs de 15 : 1
→ Disjonction des cas : 1
→ Syst : 1
→ conclusion : 1

$4x^2 = y^2 + 15 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (2x-y)(2x+y) = 15$

comme x et $y \in \mathbb{N}$, $2x+y > 2x-y$

Diviseurs entiers naturels de $15 = \{1; 3; 5; 15\}$

Par disjonction des cas :

① $2x+y=5$, $2x-y=3$

$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ x=\frac{8}{4}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-2\times2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$

② $2x+y=15$, $2x-y=1$

$\begin{cases} 2x+y=15 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=15 \\ 4x=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-2\times4 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=4 \end{cases}$

Vérification :
$4 \times 2^2 - 1^2 = 15$
$4 \times 4^2 - 7^2 = 15$

Donc $\boxed{S = \{(2;1);(4;7)\}}$

NOM :……………………………… PRENOM :……………………… Classe :………………

Exercice 4 : $/4$ → Demo $5n+2 \mid 19$ (2) → Disjonction des cas (1) → conclusion (1).

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que : $5n + 2 \mid 7n - 1$

$\left.\begin{array}{l} 5n+2 \mid 5n+2 \\ \text{et } 5n+2 \mid 7n-1 \end{array}\right\}$ d'où $5n+2 \mid 7\times(5n+2) - 5\times(7n-1)$ (car $5n+2$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $5n+2$ et $7n-1$)

$5n+2 \mid 19$ Diviseurs de 19 dans $\mathbb{Z}$ $= \{-1; 1; 19; -19\}$

Par disjonction des cas :

(1) $5n+2 = 1 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ (2) $5n+2 = -1 \Leftrightarrow n = -\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$ (3) $5n+2 = 19 \Leftrightarrow n = \frac{17}{5} \notin \mathbb{Z}$

(4) $5n+2 = -19 \Leftrightarrow n = -\frac{21}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Donc $\boxed{S = \emptyset}$

Exercice 5 : $/3$ → a) 1 → b) 1 → c) 1

On considère l'équation (E) : $x^3 + x^2 + bx + c = 0$ où b et c sont des entiers relatifs

a) Montrer que si un entier a est une solution de (E), alors $a \mid c$

a solution de $(E) \Leftrightarrow a^3 + a^2 + ab = -c$
$\Leftrightarrow a(a^2 + a + b) = -c$ | d'où $a \mid -c$ c'est-à-dire : $\boxed{a \mid c}$

b) L'équation $x^3 + 3x + 3 = 0$ admet-elle des solutions entières ? Justifier

Si a est une solution entière de cette équation, alors $a \mid 3$, d'après a).

Or, les diviseurs de 3 sont $\{1; -1; 3; -3\}$

Disjonction des cas :

(1) $a = 1$: $1^3 + 3\times1 + 3 \neq 0$ | (2) $a = -1$: $(-1)^3 + 3\times(-1) + 3 \neq 0$ | (3) $a = 3$: $3^3 + 3\times3 + 3 \neq 0$ | (4) $a = -3$: $(-3)^3 + 3\times(-3) + 3 \neq 0$ | Donc : $\boxed{S = \emptyset}$

c) Même chose avec l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$

Si a est solution de $(E) \Leftrightarrow a \mid 4$ Diviseurs de 4 $= \{1; -1; 2; -2; 4; -4\}$

Disjonction des cas :

(1) $a = 1$: $1 - 15 - 4 \neq 0$ | (2) $a = -1$: $-1 + 15 + 3 \neq 0$ | (3) $a = 2$: $8 + \cancel{30 + 4} \neq 0$ | (4) $a = -2$: $-8 + 30 - 4 \neq 0$ | (5) $a = 4$: $64 - 60 - 4 = 0$ | (6) $a = -4$: $-64 + 60 - 4 \neq 0$

Une seule solution : $\boxed{S = \{4\}}$