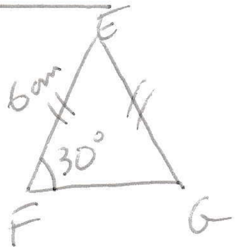
Spé Première

Corrigé du devoir de rattrapage
Produit scalaire (Fait le 30/01/25)

Exercice 1

1)


EFG est un triangle isocèle en E

d'où $\widehat{EFG} = \widehat{EGF} = 30°$

or, $\widehat{GEF} + \widehat{EFG} + \widehat{EGF} = 180°$

d'où : $\widehat{GEF} = 180 - 2\times 30 = 120°$

Alors : $\underline{\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}} = EF \times EG \times \cos \widehat{GEF}$

$= 6^2 \times \cos 120°$

$= 36 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{-18}$

2) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2-4 \\ 7+5 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{GE} = -4\vec{u}$, or $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, d'où : $-4\vec{u}\begin{pmatrix} -4\times 5 \\ -4\times(-3) \end{pmatrix}$

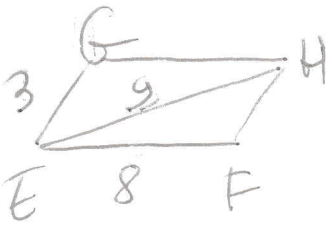
c'est-à-dire : $-4\vec{u}\begin{pmatrix} -20 \\ 12 \end{pmatrix}$

or, $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} -20 \\ 12 \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 20 \\ -12 \end{pmatrix}$

On a : $\underline{\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}} = x_{\overrightarrow{EF}} \times x_{\overrightarrow{EG}} + y_{\overrightarrow{EF}} \times y_{\overrightarrow{EG}} = -6\times 20 + 12\times(-12)$

$= -120 - 144 = \underline{-264}$

3)



on a : $\|\overrightarrow{EF}\| = EF = 8$

$\|\overrightarrow{EH}\| = EH = 9$

$\|\overrightarrow{EG}\| = EG = 3$

On a :

$$\underline{\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}\|^2 - \|\overrightarrow{EF}\|^2 - \|\overrightarrow{EG}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{EH}\|^2 - EF^2 - EG^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[9^2 - 8^2 - 3^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(81 - 64 - 9)$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = \boxed{4}$$

Exercice 2 :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = -3\vec{u}$

* Méthode 1 : $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\times 2\\-3\times(-3)\end{pmatrix}$, d'où $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$

or, $\underline{\|\vec{v}\|} = \sqrt{x_{\vec{v}}^2 + y_{\vec{v}}^2} = \sqrt{(-6)^2 + 9^2}$

$= \sqrt{36+81} = \underline{\sqrt{117}}$

* Méthode 2

$\underline{\|\vec{v}\|} = \|-3\vec{u}\| = 3 \times \|\vec{u}\|$

$= 3 \times \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$

$= 3 \times \sqrt{4+9}$

$= 3\sqrt{13} = \sqrt{9 \times 13} = \sqrt{117}$

2) $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$

On a :

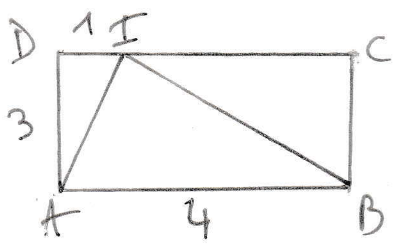
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = 9 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 16$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 9+16-5 = 20$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\vec{u}\cdot\vec{v}} = \frac{20}{2} = \underline{10}$$

Exercice 3 :



ABCD rectangle
AB = 4
AD = 3
DI = 1

1) $\vec{IA} = \vec{ID} + \vec{DA}$ (relation de Chasles)

et $\vec{IB} = \vec{IC} + \vec{CB}$ (relation de Chasles)

d'où : $\underline{\vec{IA}\cdot\vec{IB} = (\vec{ID}+\vec{DA})\cdot(\vec{IC}+\vec{CB})}$

2) $$\underline{\vec{IA}\cdot\vec{IB}} = \vec{ID}\cdot\vec{IC} + \underbrace{\vec{ID}\cdot\vec{CB}}_{=0,\text{ car } \vec{ID}\perp\vec{CB}} + \overbrace{\vec{DA}\cdot\vec{IC}}^{=0,\text{ car } \vec{DA}\perp\vec{IC}} + \vec{DA}\cdot\vec{CB}$$

$$= \vec{ID}\cdot\vec{IC} + \vec{DA}\cdot\vec{CB}$$

$$= \underline{\vec{ID}\cdot\vec{IC} + DA^2}$$, car $\vec{DA}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires de même sens

3) $\vec{ID}$ et $\vec{IC}$ sont colinéaires de sens opposés

d'où $\vec{ID}\cdot\vec{IC} = -ID \times IC = -1\times 3 = -3$

Alors : $\underline{\vec{IA}\cdot\vec{IB}} = -3+3^2 = -3+9 = \underline{6}$

On a : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 6$

et $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IA \times IB \times \cos \widehat{AIB}$

Dans le triangle ADI, rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$IA^2 = DA^2 + DI^2$$
$$= 3^2 + 1^2 = 10$$

d'où : $\underline{IA = \sqrt{10}}$

Dans le triangle ICB, rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$IB^2 = IC^2 + CB^2$$
$$= 3^2 + 3^2 = 18$$

d'où $\underline{IB} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = \underline{3\sqrt{2}}$

D'où : $\sqrt{10} \times 3\sqrt{2} \times \cos \widehat{AIB} = 6$

$\iff \cos \widehat{AIB} = \dfrac{6}{3\sqrt{20}} = \dfrac{6}{3\sqrt{4 \times 5}} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Alors : $\underline{\widehat{AIB}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \underset{\text{Avec la calculatrice}}{\simeq} \underline{63°}$