Spé Première

Corrigé du DS commun n° 1

Exercice 1 : /5

Q1 : $(x+2)^2 + 5 = 0 \; (E)$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = -5$, or, $(x+2)^2 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $-5 < 0$

Donc l'équation (E) n'admet pas de solution réelle

$S = \emptyset$

Réponse $\boxed{c}$

Q2 : $f(x) = -3(x-1)^2 + 4$ (forme canonique de f)

avec $\begin{cases} a = -3 < 0 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{cases}$: d'où la parabole représentant f est orientée vers le bas

De plus : les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha ; \beta)$ c'est-à-dire $(1 ; 4)$

Donc : Réponse $\boxed{b}$

Q3 : $g(x) = 3x^2 + 12x - 1 \begin{cases} a = 3 \\ b = 12 \\ c = -1 \end{cases}$

$g(x) = 3(x^2 + 4x) - 1$

$= 3[(x+2)^2 - 2^2] - 1$

$= 3(x+2)^2 - 3 \times 4 - 1$

$= 3(x+2)^2 - 13$ Donc : Réponse $\boxed{a}$

Q4 : $h(x) = (x+1)(x-3)$ $a = 1 > 0$: d'où la parabole représentant h est orientée vers le haut

De plus : h s'annule en -1 et en 3

car $(x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Donc : Réponse $\boxed{a}$

5) $f(x) = -2(x+1)^2 + 1$: forme canonique de f ②

avec $\begin{cases} a = -2 < 0 : \text{d'où } f \text{ est d'abord croissante, puis décroissante} \\ \alpha = -1 \\ \beta = 1 \text{ est le maximum de } f \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$

et il est atteint en $x = \alpha = -1$

Donc : Réponse $\boxed{b}$

Exercice ② : /5

a) $3x^2 = 15x \iff 3x^2 - 15x = 0$

$\iff 3x(x-5) = 0$ ①

$\iff 3x = 0$ ou $x - 5 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 5$

Donc : $S = \{0 ; 5\}$

b) $7x - 2x^2 - 10 = 0 \iff -2x^2 + 7x - 10 = 0$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \\ c = -10 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-10)$

① $= 49 - 80 = -31 < 0$: d'où l'équation n'admet aucune solution réelle.

Donc : $S = \emptyset$

c) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$ $\begin{cases} a = -9 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-9) \times (-1)$

$= 36 - 36 = 0$: d'où l'équation admet une seule solution.

① $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2 \times (-9)} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{1}{3}$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

d) $2x^2 - 5 = x - 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 5 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -3 \end{cases}$

2

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$

$= 1 + 24 = 25 > 0$: d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2\times 2} = \frac{\cancel{2}\times 3}{\cancel{2}\times 2} = \frac{3}{2}$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2\times 2} = \frac{-2\times 2}{2\times 2} = -1$

Donc : $S = \left\{ \frac{3}{2} ; -1 \right\}$

Exercice 3 : 2,5

1). La parabole est orientée vers le haut, d'où : $\boxed{a > 0}$
. Elle coupe deux fois l'axe des abscisses, d'où : $\boxed{\Delta > 0}$

2) . La parabole est orientée vers le haut, d'où $\boxed{a > 0}$
. Elle coupe l'axe des abscisses en un seul point, d'où $\boxed{\Delta = 0}$

3) . La parabole est orientée vers le bas, d'où $\boxed{a < 0}$
. Elle ne coupe pas l'axe des abscisses, d'où $\boxed{\Delta < 0}$

Exercice 4 : 4,5

$f(x) = 6x^2 + 3x - 9$

1) $-3(2x+3)(1-x) = -3(2x - 2x^2 + 3 - 3x)$

$= -6x + 6x^2 - 9 + 9x$

$= 6x^2 + 3x - 9 = f(x)$

Donc : $f(x) = -3(2x+3)(1-x)$

2) Méthode 1 :

$f(x) = 6x^2 + 3x - 9$ $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -9 \end{cases}$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 6} = \frac{-\cancel{3}}{2 \times \cancel{3} \times 2} = -\frac{1}{4}$

$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right) - 9$

$= 6 \times \frac{1}{16} - \frac{3}{4} - 9$

$= \frac{3}{8} - \frac{6}{8} - \frac{72}{8} = -\frac{75}{8}$

D'où la forme canonique de f est $f(x) = 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{75}{8}$

(car $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$)

Méthode 2 :

$f(x) = 6x^2 + 3x - 9$

$= 6\left(x^2 + \frac{3}{6}x\right) - 9$

$= 6\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) - 9$

$= 6\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - 9$

$= 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 6 \times \left(-\frac{1}{16}\right) - 9$

$= 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 8} - 9$

$= 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{8} - \frac{72}{8}$

$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{75}{8}$ forme canonique avec $\begin{cases} a = 6 \\ \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{75}{8} \end{cases}$

3) a) $f(x) = 0 \iff -3(2x + 3)(1 - x) = 0$ (forme factorisée)

$\iff 2x + 3 = 0$ ou $1 - x = 0$

$\iff 2x = -3$ ou $x = 1$

$\iff x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 1$

Donc : $S = \left\{-\frac{3}{2} ; 1\right\}$

b) Antécédents de -9 par f :

on cherche les éventuels x tel(s) que :

$$f(x) = -9$$

$$\iff 6x^2 + 3x \cancel{-9} = \cancel{-9} \text{ (forme développée)}$$

$$\iff 3x(2x+1) = 0$$

$$\iff 3x = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } 2x = -1$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc : 0 et $-\frac{1}{2}$ sont les deux antécédents de -9 par f.

c) $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 6\left(\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=0}\right)^2 - \frac{75}{8}$ (forme canonique)

$$= -\frac{75}{8}$$

d) $a = 6 > 0$: d'où f est d'abord décroissante, puis croissante

De plus, avec la forme canonique de f $\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{75}{8} \end{cases}$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	$-\frac{75}{8}$	$\nearrow$	

e) D'après les variations :

$-\frac{75}{8}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et il est atteint en $x = -\frac{1}{4}$

Exercice (9) :

1) a) Par lecture graphique :

le sommet S de $(\mathcal{C}_f)$ a pour coordonnées $(2;1)$

D'où $\boxed{\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}}$

b) On a : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$= a(x-2)^2 + 1$

c) $B(0;-3)$ est situé sur $(\mathcal{C}_f)$

$\Leftrightarrow a(0-2)^2 + 1 = -3$

$\Leftrightarrow 4a + 1 = -3$

$\Leftrightarrow 4a = -3 - 1 = -4$

$\Leftrightarrow a = -\frac{4}{4} = -1$

Donc : $\underline{f(x) = -(x-2)^2 + 1}$

2) Question BONUS :

a) $f(x) = -(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) + 1$

$= -(x^2 - 4x + 4) + 1$

$= -x^2 + 4x - 4 + 1$

$= \underline{-x^2 + 4x - 3}$ (forme développée)

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2-1)(x-2+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=1$

$S=\{1;3\}$

c) D'après b), les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses sont ceux de coordonnées $(1;0)$ et $(3;0)$

Exercice 6 : /4

$f(x)=-2x^2+8x+10$

1) Quand $x=0$, $f(0)=-2\times0^2+8\times0+10=10$ m

La falaise fait 10 m de haut

2) Il touche la surface de l'eau quand $f(x)=0$

$\Leftrightarrow -2x^2+8x+10=0$ $\begin{cases} a=-2 \\ b=8 \\ c=10 \end{cases}$

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-2)\times10=64+80=144>0$: d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+12}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1<0$ impossible car $x\geq0$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-12}{2\times(-2)}=\frac{-20}{-4}=5\geq0$

Le projectile touche la surface de l'eau à 5 m de la falaise.

3) On a $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2\times(-2)}=\frac{-8}{-4}=2$

$a=-2<0$: d'où f est d'abord croissante puis décroissante.

$\beta=f(\alpha)=f(2)=-2\times2^2+8\times2+10=-8+16+10=18$

La hauteur maximale atteinte par le projectile est de 18 m