Spé maths Première
(M. Mangeard)

Corrigé du DS du 14/15 novembre 2024

Exercice 1 :

1) Définition mathématique de la suite :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n + 2 \\ v_0 = -3 \end{cases}$$

2) c'est une suite définie par récurrence car $v_{n+1} = f(v_n)$
avec f : fonction
(plus précisément :
$f(x) = \frac{3}{4}x + 2$)

3) Le programme précédent permet de calculer v_{36}
(Chaque passage dans la boucle bornée permet de calculer un terme intermédiaire)

4) A l'aide de la calculatrice, on obtient $v_{36} \simeq 7,9997$

Exercice 2 :

Dans la cellule B2, il suffit d'écrire :

= 3*A2^2-5*A2+2

Exercice 3 :

1) $x_0 = \boxed{-1}$, $x_1 = -\frac{1}{2}x_0^2 + 2 = -\frac{1}{2}\times(-1)^2 + 2$
$= -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

$x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 + 2 = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{2}\times\frac{9}{4} + 2$
$= -\frac{9}{8} + \frac{16}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2^2 + 2$$
$$= -\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 2$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{49}{64} + 2$$
$$= -\frac{49}{128} + \frac{256}{128} = \boxed{\frac{207}{128}}$$

2) Avec la calculatrice :

$$\begin{cases} x_{17} = 2 \\ x_{18} = 0 \\ x_{19} = 2 \\ x_{20} = 0 \end{cases}$$

A partir du rang $n = 17$,

$$x_n = \begin{cases} 2, \text{ si } n \text{ impair} \\ 0, \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Exercice 4 : $y_n = -2n^2 - n + 1$

1) $y_{n+1} = -2(n+1)^2 - (n+1) + 1$
$= -2(n^2 + 2n + 1) - n \cancel{-1} \cancel{+1}$
$= -2n^2 - 4n - 2 - n$

Donc : $y_{n+1} = -2n^2 - 5n - 2$

$y_{2n} = -2(2n)^2 - 2n + 1$
$= -2 \times 4n^2 - 2n + 1$

Donc $y_{2n} = -8n^2 - 2n + 1$

2)
```
def y(n):
    return -2*n**2-n+1
```

Exercice 5 :

1) Comme $BC = 7$ cm, x étant une longueur

$0 \leq x \leq 7$, c'est-à-dire $x \in [0;7]$

2) $\text{Aire}(AMD) = \dfrac{AD \times AM}{2}$

$= \dfrac{7x}{2}$

$\text{Aire}(DCN) = \dfrac{DC \times CN}{2}$

$= \dfrac{12 \times (7-x)}{2}$ (car $CN = BC - BN$
$= 7 - x$)

$\text{Aire}(MNB) = \dfrac{BM \times BN}{2}$

$= \dfrac{(12-x) \times x}{2}$ (car $BM = AB - AM = 12 - x$)

3) On a $f(x) = \text{Aire}(DMN)$

$= \text{Aire}(ABCD) - (\text{Aire}(AMD) + \text{Aire}(DCN) + \text{Aire}(MNB))$

$= 12 \times 7 - \left(\dfrac{7x}{2} + \dfrac{12(7-x)}{2} + \dfrac{(12-x) \times x}{2}\right)$

$= 84 - \dfrac{7}{2}x - 6(7-x) - \dfrac{1}{2}(12x - x^2)$

$= 84 - \dfrac{7}{2}x - 42 + \cancel{6x} - \cancel{6x} + \dfrac{1}{2}x^2$

Donc : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{2}x + 42$

4) a) $f(x) = 39 \iff \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{2}x + 42 = 39$

$\iff \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{2}x + 3 = 0$ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \\ c = 3 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} \times 3$

$= \dfrac{49}{4} - 6 = \dfrac{49}{4} - \dfrac{24}{4} = \dfrac{25}{4} > 0$

D'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{2}+\frac{5}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6 \in [0;7]$$

et $$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \in [0;7]$$

Donc : Pour $x = 1$ cm ou 6 cm, l'aire du triangle DMN est égale à 39 cm^2

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 42$ $\quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \\ c = 42 \end{cases}$

⚠ $a = \frac{1}{2} > 0$, d'où f est d'abord décroissante, puis croissante.

D'où le calcul de α donnerait alors la valeur de x permettant d'obtenir l'aire minimale de DMN.

or, $x \in [0;7]$ on va tracer le tableau de variations de f sur $[0;7]$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{7}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} \quad \text{et } \beta = f(\alpha) = f\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\times\frac{7}{2} + 42$$

$$= \frac{49}{8} - \frac{49}{4} + 42$$

$$= \frac{49}{8} - \frac{98}{8} + \frac{336}{8} = \frac{287}{8}$$

x	0		$\frac{7}{2}$		7
Variation de f	42	↘	$\frac{287}{8}$	↗	42

$f(0) = 42$

et $f(7) = \frac{1}{2}\times 7^2 - \frac{7}{2}\times 7 + 42$

$= \frac{49}{2} - \frac{49}{2} + 42 = 42$

cette aire est maximale pour $x = 0$ ou $x = 7$ cm.

c) $f(x) \geqslant 39 \iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 42 \geqslant 39$

$\iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 \geqslant 0$

or, d'après 4a), le binôme g défini sur $[0;7]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$ admet deux racines réelles distinctes $x_1 = 6$ et $x_2 = 1$

or, le binôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

avec $a = \frac{1}{2} > 0$, d'où le tableau de signes suivant :

x	0		1		6		7
signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	

Autrement dit : $g(x) \geqslant 0 \iff x \in [0;1] \cup [6;7]$

Donc : L'aire de (DMN) sera supérieure strictement à $39\ cm^2$ pour $x \in [0;1[\cup]6;7]$