Spé Maths Première	**Corrigé du devoir commun de mathématiques n°1 :**	Fait le mardi 03/10/2023

Exercice 1 : (3,5 pts)

1) a) Comme f est d'abord croissante, puis décroissante (d'après le tableau de variation), alors :

$$\mathbf{a < 0}$$

b) On sait que f(1) = 0, c'est-à-dire : 1 est une racine de f.

Or, d'après le tableau de variation de f, la droite d'équation x = -3 est axe de symétrie de la parabole représentant f. D'où f admet une autre racine.

Par conséquent : $\mathbf{\Delta > 0}$

OU *(autre justification) :*

(On sait que 1 est racine de f (car f(1) = 0) et si Δ = 0, alors la seule racine est α = -3 ici.

Or, $\alpha \neq 1$. Donc, $\mathbf{\Delta > 0)}$

c) Comme Δ > 0, f admet bien deux racines. On sait déjà que 1 est racine de f.

La droite d'équation x = -3 étant axe de symétrie de la parabole représentant f, il y a quatre unités pour aller de -3 à 1, il faut donc soustraire quatre unités pour aller de -3 à la deuxième racine.

Donc : $\mathbf{x_2 = -3 - 4 = -7}$

2)a) On sait que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (forme canonique de f)

D'après le tableau de variation : α = -3 et β = 5

D'où : $f(x) = a(x + 3)^2 + 5$

Or, f(1) = 0, d'où : $a(1+3)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 16a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{16}$

Par conséquent : la forme canonique de f est donnée par : $f(x) = -\frac{5}{16}(x + 3)^2 + 5$

Exercice 2 : (5,5 pts)

1) On a $f(x) = x^2 - 3x + 2$, avec : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, d'où f admet deux racines réelles distinctes.

2) Soit $f(x) = -3x^2 + 6x + 9$, avec : $\begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-3) \times 9 = 36 + 108 = 144 > 0$: d'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 12}{-6} = -1$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 12}{-6} = 3$

Le trinôme f est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, a <0

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de f(x)		-	0	+	0	-	

Par conséquent :

$f(x) \geq 0$, pour $x \in [-1 ; 3]$

$f(x) < 0$, pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$

3) a) $8x^2 - 5x - 2 = (2x + 3)(x - 1)$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 5x - 2 = 2x^2 - 2x + 3x - 3$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 1 = 0$: $\begin{cases} a = 6 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 36 - 24 = 12 > 0$: d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{12}}{12} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{12}}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$

Donc :

$$S = \left\{\frac{3+\sqrt{3}}{6} ; \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right\}$$

b) Valeur interdite :

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. On va donc résoudre l'équation sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$

Or, $\frac{-2x^2-12x-19}{x-4} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 12x - 19 = 0$ avec : $\begin{cases} a = -2 \\ b = -12 \\ c = -19 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times(-2)\times(-19) = 144 - 152 = -8 < 0$. D'où l'équation n'admet aucune racine réelle.

Donc : **S = ∅**

4) $-4x^2 + 20x - 25 \leq 0$ avec : $\begin{cases} a = -4 \\ b = 20 \\ c = -25 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times(-4)\times(-25) = 400 - 400 = 0$. D'où le trinôme admet une seule racine réelle.

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$

Le trinôme est toujours du signe de a et il s'annule en $x = x_0$ .Or, $a < 0$

Donc S = ℝ

Exercice 3 : (7 pts)

1) $f(x) = 2x^2 - 10x - 2x + 16$

$= \mathbf{2x^2 - 12x + 16}$ avec : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 16 \end{cases}$

2) On a $S(\alpha ;\beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{4} = 3$ et $\beta = f(\alpha) = f(3) = 2\times9 - 12 \times 3 + 16 = -2$

Donc : **le point S a pour coordonnées : (3 ;-2)**

3) Comme a > 0, f possède un minimum sur $\mathbb{R}$

Il vaut $\beta = -2$ et il est atteint en $x = \alpha = 3$

4) Tableau de variation de f :

Comme a > 0, f est d'abord décroissante, puis croissante :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f	↘	-2	↗

5) Intersection avec l'axe des abscisses :

On doit résoudre f(x) = 0, c'est-à-dire : $2x^2 - 12x + 16 = 0$ avec : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 16 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 16 = 144 - 128 = 16 > 0$, d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + 4}{4} = 4$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - 4}{4} = 2$

La parabole représentant f possède deux points d'intersection avec l'axe des abscisses :

A(4 ;0) et B(2 ;0)

6) Intersection avec l'axe des ordonnées :

f(0) = 16. Le seul point d'intersection de la parabole représentant f avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées : **(0 ;16)**

7) $2x^2 - 14x + 20 = 0$ avec : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -14 \\ c = 20 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 2 \times 20 = 196 - 160 = 36 > 0$, d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 + 6}{4} = 5 \qquad \text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 - 6}{4} = 2$$

Donc **S = {5 ;2}**

Les abscisses des éventuels points d'intersection de (C_f)

avec la droite d'équation : $y = 2x - 4$ sont solutions de l'équation :

$$2x^2 - 12x + 16 = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 2x + 16 + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0$ il s'agit de l'équation précédente.

Donc : Il y a deux points d'intersection de coordonnées respectives (5 ;f(5)) et (2 ;f(2))

Or $f(5) = 2\times5^2 - 12\times5 + 16 = 6$ et $f(2) = 2\times2^2 - 12\times2 + 16 = 0$

Par conséquent : **les points d'intersection sont ceux de coordonnées (5 ;6) et (2 ;0)**

Exercice 4 : (4 pts)

1)a) $-0,01(x - 28)^2 + 9,61 = -0,01(x^2 - 56x + 784) + 9,61$

$$= -0,01x^2 + 0,56x - 7,84 + 9,61$$

$$= -0,01x^2 + 0,56x + 1,77$$

Or, $f(x) = -0,01x^2 + 0,56x + 1,77$, donc : **$f(x) = -0,01(x - 28)^2 + 9,61$**

b) $-0,01(x + 3)(x - 59) = -0,01(x^2 - 59x + 3x - 177)$

$$= -0,01x^2 + 0,56x + 1,77 = f(x)$$

Donc : **$f(x) = -0,01(x + 3)(x - 59)$**

c) La forme 1 est la forme développée et réduite

La forme 2 est la forme canonique

La forme 3 est la forme factorisée

2)a) Avec la forme 1, pour x = 0, on trouve f(0) = 1,77.

Le lanceur mesure donc 1,77m

b) La pointe du javelot touche le sol quand f(x) = 0

C'est-à-dire : avec la forme 3, on obtient : $-0,01(x + 3)(x – 59) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x – 59 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 59$

Or $x \geq 0$, donc : **Le javelot touche le sol au bout de 59 m**

c) Avec la forme 2 , le maximum atteint par f est $9,61 = \beta$

La hauteur maximale atteinte par la pointe du javelot est 9,61m