Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du DM** *Second degré (Problème 112 page 101)*	Rendu le vendredi 10 novembre 2023

On a $x \in [0\,;150]$ d'après l'énoncé.

$f(x) = 0{,}23x^2 + 4x + 300$

1) Pour la fabrication de 20 boîtes, le coût de production correspondant est donné par :

   $f(20) = 0{,}23\times 20^2 + 4\times 20 + 300 = 472$

   Donc le coût de fabrication de 20 boîtes est de 472 €

2) La recette est donnée par $R(x) = 50x$

3) Sur $[0\,;150]$, $B(x)$ = Recette – coût de production = $R(x) - f(x)$

   $= 50x - (0{,}23x^2 + 4x + 300)$

   $= -0{,}23x^2 + 50x - 4x - 300$

   Donc : $B(x) = -0{,}23x^2 + 46x - 300$

4) Pour $x = 20$, $B(20) = -0{,}23\times 20^2 + 46\times 20 - 300$

   $= 528$

   Pour la vente de 20 boîtes, le bénéfice est de 528 €

5) On a : $\begin{cases} a = -0{,}23 \\ b = 46 \\ c = -300 \end{cases}$, $a < 0$, d'où : B est d'abord croissante, puis décroissante

   D'autre part, $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{46}{2\times(-0{,}23)} = 100$

   Et $\beta = B(\alpha) = B(100) = -0{,}23\times 100^2 + 46\times 100 - 300 = 2\,000$

   D'où le tableau de variation suivant :

x	0	100	150
Variations de B	-300 ↗	2000	↘ 1425

6) D'après les variations de B, le bénéfice maximum est β = 2 000 € et il est atteint pour la vente de α = 100 boîtes

7) a) $B(x) = 1\,425$

   $\Leftrightarrow -0{,}23x^2 + 46x - 300 = 1\,425$

   $\Leftrightarrow -0{,}23x^2 + 46x - 300 - 1425 = 0$

   $\Leftrightarrow -0{,}23x^2 + 46x - 1725 = 0$ avec : $\begin{cases} a = -0{,}23 \\ b = 46 \\ c = -1725 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 46^2 - 4\times(-0{,}23)\times(-1725) = 529 > 0$, d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-46+23}{2\times(-0{,}23)} = 50$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-46-23}{2\times(-0{,}23)} = 150$

Donc : <u>Pour la vente de 50 boîtes ou de 150 boîtes, le bénéfice sera de 1725 €</u>

b) $B(x) = 3000$

D'après 5), le bénéfice maximum est de 2000 €, donc <u>un bénéfice de 3000€ est impossible</u>

8) Pour être rentable, $B(x) > 0$

C'est-à-dire : $-0{,}23x^2 + 46x - 300 > 0$ avec $\begin{cases} a = -0{,}23 \\ b = 46 \\ c = -300 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 46^2 - 4\times(-0{,}23)\times(-300) = 1840 > 0$: d'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-46+\sqrt{1840}}{2\times(-0{,}23)} \simeq 6{,}7$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-46-\sqrt{1840}}{2\times(-0{,}23)} \simeq 193{,}3 > 150$

Or, le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines, donc du signe de -a entre ses racines,

D'où : $B(x) > 0$, pour $x \in [x_1 ; 150]$.

Autrement dit, <u>pour être rentable, il faut produire au moins 7 boîtes</u>