ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 20 mars 2024

Candidats suivant la spécialité mathématiques de la voie générale

Deuxième partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

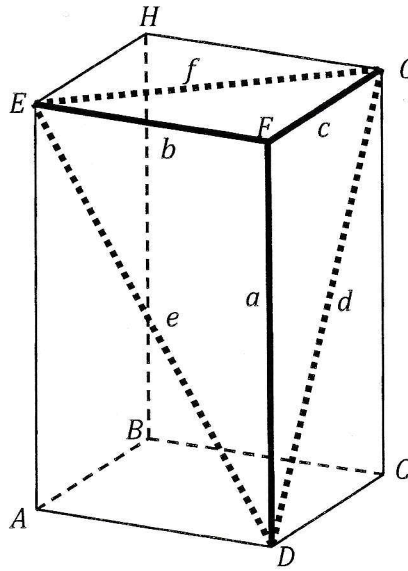
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice 1 – La brique d'Euler

Partie 1 : Brique d'Euler

On considère le pavé droit ci-contre où les nombres a, b, c, d, e et f sont définis ainsi : $a = FD$, $b = EF$, $c = FG$, $d = GD$, $e = ED$ et $f = EG$.



Dans tout ce sujet, un triplet (a, b, c) définit une brique d'Euler si les longueurs a, b et c des arêtes du pavé droit ainsi que les longueurs d, e et f des diagonales des faces sont des nombres entiers.

1. Expliquer pourquoi le pavé droit de dimensions $a = 1, b = 2$ et $c = 3$ n'est pas une brique d'Euler.

2. Vérifier que le pavé droit de dimensions $a = 44$, $b = 117$ et $c = 240$ est une brique d'Euler.

3. Considérons une brique d'Euler.
   a. Justifier que $e^2 = a^2 + b^2$.
   b. Exprimer de même f^2 et d^2 en fonction de a, b et c.

4. Soit k un entier strictement positif.
   a. Montrer que si (a, b, c) est un triplet définissant une brique d'Euler, alors (ka, kb, kc) est encore un triplet définissant une autre brique d'Euler.
   b. En déduire un second triplet définissant une brique d'Euler.

5. **a.** Montrer que si (a, b, c) est un triplet définissant une brique d'Euler, alors (bc, ca, ab) est encore un triplet définissant une brique d'Euler.
   b. En déduire un troisième triplet définissant une brique d'Euler.

Partie 2 : Lien avec des triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien un triplet (x, y, z) d'entiers naturels vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Vérifier que le triplet $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien.

Si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, on pose :

- $a = y(4x^2 - z^2)$
- $b = x(4y^2 - z^2)$
- $c = 4xyz$

2. Quelles valeurs retrouve-t-on pour a, b et c pour le triplet pythagoricien $(3, 4, 5)$?

3. On considère un triplet pythagoricien (x, y, z).
   a. Démontrer que $b^2 + c^2 = \left(x(4y^2 + z^2)\right)^2$.
   b. Démontrer que $a^2 + c^2 = \left(y(4x^2 + z^2)\right)^2$.
   c. Démontrer que $a^2 + b^2 = (z^3)^2$.
   d. En déduire que le triplet (a, b, c) définit une brique d'Euler.

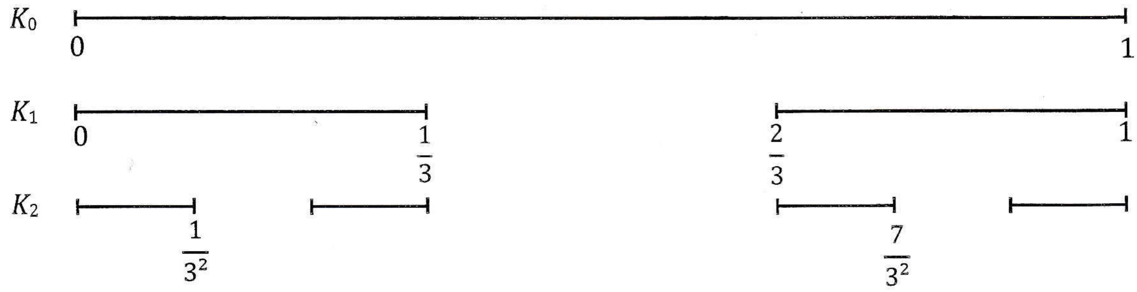
4. On considère un triplet pythagoricien (x, y, z) définissant une brique d'Euler dont les longueurs a, b et c des arêtes sont données par les formules $a = y(4x^2 - z^2)$, $b = x(4y^2 - z^2)$ et $c = 4xyz$.
   Le volume de la brique d'Euler est donné par abc.
   a. Démontrer que si x et y sont impairs alors z est pair.
   b. En déduire que si x et y sont impairs alors le volume est divisible par 2^7.
   c. Démontrer que si x et y sont pairs alors le volume est divisible par 2^9.
   d. Démontrer que, dans tous les cas, le volume est divisible par 2^4.

Exercice 2 – Développement triadique

L'ensemble triadique de Cantor (de son prénom Georg, mathématicien allemand, 1845 - 1918) se construit de la manière suivante :

- on part de l'intervalle $K_0 = [0\,;1]$;
- pour obtenir K_1, on divise en trois parties égales l'intervalle K_0 et on retire la partie centrale de K_0 ;
- pour obtenir K_2 , K_3, etc… on réitère le processus sur chacun des sous-intervalles ainsi obtenus.

L'ensemble triadique de Cantor K_∞ est alors l'ensemble obtenu en répétant ce processus à l'infini.



Le but du sujet est de déterminer si certains nombres réels appartiennent à K_∞.

Partie 1 : Longueur des ensembles K_n

1. Compléter K_2 en précisant les abscisses manquantes puis représenter K_3 .

2. Donner deux éléments qui appartiennent à l'ensemble K_n, pour tout $n \geq 1$.

3. $\frac{1}{8}$ appartient-il à K_3 ? Montrer que $\frac{1}{2^n}$ n'appartient pas à K_n pour tout $n \geq 1$.

4. Le nombre $\frac{1}{10}$ appartient à K_2 car $0 < \frac{1}{10} < \frac{1}{3^2}$.

En suivant le même raisonnement, démontrer que $\frac{1}{10}$ appartient à K_3 puis à K_4

5. Pour tous réels a et b tels que $a \geq b$, la **longueur** de l'intervalle $[a\,; b]$ est définie par $\ell([a\,; b]) = b - a$.
Si un ensemble E est la réunion disjointe d'intervalles, alors sa longueur $\ell(E)$ est égale à la somme des longueurs des intervalles le constituant.

a. Donner $\ell(K_1)$, $\ell(K_2)$ et $\ell(K_3)$.
b. Pour $n \geq 1$, donner, sans justification, l'expression de $\ell(K_n)$ en fonction de n.
c. Que peut-on en déduire sur la longueur $\ell(K_n)$ quand n devient de plus en plus grand ?

Partie 2 : Nombres et développements triadiques

1. Un nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ est triadique s'il existe un entier p tel que $3^p x$ est un nombre entier.

a. Justifier que les nombres rationnels $a = \frac{2}{9}$ et $b = \frac{2024}{2187}$ sont triadiques.
b. Montrer que $c = \frac{1}{10}$ n'est pas triadique.

2. On admet que tout nombre réel x de $[0\,;1]$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

où chaque numérateur a_i de la somme est un nombre entier compris entre 0 et 2, et où la somme contient une infinité de termes.
Cette écriture porte le nom d'écriture triadique de x , car chacun des termes la constituant est triadique.

On donne ci-contre un algorithme permettant, pour un réel x donné entre 0 et 1, de calculer les numérateurs a_i pour $1 \leq i \leq n$.

On utilise pour cela la fonction **int()** , qui étant donné un nombre réel positif, renvoie sa partie entière. Par exemple int(2,4) renvoie 2.

```
def triadique(x,n):
  for k in range(1,n+1):
    a=int(3*x)
    print(a)
    x=3*x-a
```

En utilisant cet algorithme, déterminer les termes a_1, a_2, a_3 et a_4 dans l'écriture triadique de 0,4.

3. a. **Pré-requis :** On admettra que pour tout $n \geqslant 1$ et tout réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Pour n un entier donné, exprimer en fonction de n la somme $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$ puis en déduire l'expression de $x_n = S_n - 1$.

b. En admettant que $\frac{1}{3^{n+1}}$ devient très proche de 0 pour n assez grand, en déduire le réel x ayant une écriture triadique pour laquelle $a_i = 1$ pour tout entier i.

c. Montrer que x n'appartient pas à K_n pour tout $n \geq 1$.

4. Montrer que $y_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n}$ (somme finie) appartient à K_n.