NOM :……………………………………..Prénom :………………………………..

Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Equations de droites / Suites : algorithmes + programmes*	Fait le vendredi 15 décembre 2023

Exercice 1 : (Sur votre copie)

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1) Résoudre le système suivant par la méthode de votre choix :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ -x + 4y = 24 \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 4y - 24 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(4y - 24) + 2y = -2 \\ 4y - 24 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y - 72 + 2y = -2 \\ 4y - 24 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14y = 72 - 2 = 70 \\ 4y - 24 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{70}{14} = 5 \\ 4 \times 5 - 24 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ 20 - 24 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ -4 = x \end{cases}$$ Donc : **S = {(- 4 ; 5)}**

NOM :……………………………………..Prénom :………………………………..

2) Soient R(-3 ;7) et S(5 ; -1) dans un repère orthogonal du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (RS)

On a : $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}5-(-3)\\-1-7\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (RS)

Soit M(x ;y) $\in$ (RS), $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}x+3\\y-7\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (RS)

Or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires, donc : $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{RM} ; \overrightarrow{RS}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+3 & 8\\ y-7 & -8\end{vmatrix} = 0$$

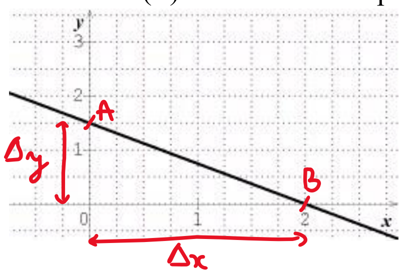
$$\Leftrightarrow -8(x+3) - (y-7)\times 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x - 8y - 24 + 56 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{-8x - 8y + 42 = 0}$ est une équation cartésienne de la droite (RS)

3) Soit la droite (d_1) d'équation réduite y = 5x – 3.
Déterminer l'équation réduite de la droite (d_2) telle que (d_2) // (d_1) et le point A(-3 ;4) $\in$ (d_2)
Comme (d_1) est oblique, (d_2) est oblique également.
(d_2) a le même coefficient directeur que (d_1), d'où : (d_2) : y = 5x + p
Or, A(-3 ;4) $\in$ (d_2), d'où : $y_A = 5x_A + p \Leftrightarrow 4 = 5\times(-3) + p$
$\Leftrightarrow 4 + 15 = p$
$\Leftrightarrow 19 = p$
Donc l'équation réduite de la droite (d_2) est : $\underline{y = 5x + 19}$

4) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) tracée dans le repère ci-dessous :



La droite (Δ) est oblique : son équation réduite est de la forme : y = mx + p

On a $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1,5}{2} = -\frac{3}{4}$. D'autre part, p = ordonnée à l'origine = 1,5

Donc : $\underline{\text{l'équation réduite de la droite } (\Delta) \text{ est : } y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}}$

<u>Exercice 2 : (Directement sur le sujet)</u>

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par la fonction Python suivante :

```
def u(n) :
    u = -1
    for i in range(1,n+1) :
        u= (5/4)*u + 1
    return u
```

1) La suite (u_n) est-elle définie explicitement ou par récurrence ? Justifier
Cette suite est définie par récurrence, car le calcul d'un terme nécessite le calcul des termes précédents (d'où la boucle for utilisée)

NOM :…………………………………….Prénom :………………………………..

2) Déterminer la définition mathématique de la suite (u_n) :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5}{4}u_n + 1 \\ u_0 = -1 \end{cases} \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3) Entrer la suite sur la calculatrice, puis compléter le tableau suivant (en arrondissant les résultats à 10^{-2} près) :

n	6	10	20	25	30	35	40
u_n	7,44	23,94	256,21	790,09	2419,38	7391,57	22565,49

4) Conjecturer les variations et le comportement à l'infini (faire des phrases)

- *Variations :* Il semblerait que la suite soit croissante
- *Comportement à l'infini* : Il semblerait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que : $u_n > 100\,000$ (en justifiant)

Avec la calculatrice, $u_{46} \simeq 86\,092 < 100\,000$ et $u_{47} \simeq 107\,616 > 100\,000$

D'où : le plus petit indice n tel que $u_n > 100\,000$ est **n = 47**

6) Voici un algorithme incomplet qui permet de résoudre le problème posé dans la question 5) :

```
n←0
Tant que u…≤….100 000
    n←n+1
Fin Tant que

Afficher n……
```

a) Compléter cet algorithme

b) Traduire cet algorithme en langage Python dans le cadre ci-dessous ;

```
n = 0
while u <=100000 :
    n=n+1
print(n)
```

7) En fait, $u_n = 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n - 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Compléter la fonction Python suivante qui permet de calculer u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$

```
def u(n) :
    return  3*(5/4)**n-4
```

b) Etudier les variations de la suite (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} - 4 - \left(3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n - 4\right)$

$= 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \cancel{-4} - 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \cancel{+4}$

$= 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{5}{4} - 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$

$= 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \left(\frac{5}{4} - 1\right) = 3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est strictement croissante