

Spé Maths Première (M Mangeard)	Corrigé du devoir de mathématiques : Dérivation	Fait le vendredi 15 mars 2024 SUJET B
------------------------------------	---	---

Exercice 1 : (Sur le sujet)

Soit $f(x) = -3x^2 - x + 1$

1) **Méthode 1 :** En utilisant un taux d'accroissement, déterminer $f'(1)$

Soit $h \neq 0$, $\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, avec $f(1+h) = -3(1+h)^2 - (1+h) + 1$

$$\begin{aligned}
 &= -3(1+2h+h^2) - 1 - h + 1 \\
 &= -3h^2 - 6h - 3 - h \\
 &= -3h^2 - 7h - 3
 \end{aligned}$$

on a:

$$\tau(h) = \frac{-3h^2 - 7h - 3 - (-3 \times 1^2 - 1 + 1)}{h} = \frac{-3h^2 - 7h - 3 + 3}{h} = \frac{-3h^2 - 7h}{h} = \frac{h(-3h - 7)}{h} = -3h - 7$$

or, $-3h - 7$ admet une limite finie quand $h \rightarrow 0$, d'où f est dérivable en 1 et

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (-3h - 7) = -7$$

2) **Méthode 2 :** A l'aide des formules de dérivation, déterminer $f'(1)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme

$$f'(x) = -3 \times 2x - 1 = -6x - 1$$

$$\text{D'où : } f'(1) = -6 \times 1 - 1 = -7$$

3) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1

$$(T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow y = -7(x-1) + (-3 \times 1^2 - 1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = -7x + 7 - 3 \Leftrightarrow y = -7x + 4 \quad (\text{équation réduite de } (T_1))$$

Exercice 2 : (Sur le sujet)

Compléter le tableau suivant avec les formules correspondantes sans justifier : (u et v étant deux fonctions)

Fonctions	Dérivées
1) $u + v$	$(u+v)' = u' + v'$
2) (ku) , $k \in \mathbb{R}$	$(ku)' = k \times u'$
3) uv	$(uv)' = u'v + uv'$
4) $\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5) $\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Exercice 3 : (Sur le sujet)

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$

- 1) Calculer $f'(x)$ en justifiant *f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x \\ &= \underline{6x^2 - 6x} \end{aligned}$$

- 2) a) En déduire $f'(-2)$

$$\begin{aligned} \text{On a: } f'(-2) &= 6(-2)^2 - 6(-2) \\ &= 6 \times 4 + 12 = 24 + 12 = \underline{36} \end{aligned}$$

- b) Déterminer l'équation réduite de la droite (T_{-2}) , droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2

$$\begin{aligned} (T_{-2}): y &= f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) \\ \Rightarrow y &= 36(x + 2) + (2x(-2)^3 - 3x(-2)^2 + 1) \\ \Rightarrow y &= 36x + 72 + (-16 - 12 + 1) \\ \Rightarrow y &= \underline{36x + 45} \quad \text{équation réduite de } (T_{-2}) \end{aligned}$$

Exercice 4 : (Sur votre copie)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (en détaillant les étapes)

1) $f(x) = \frac{2x-1}{7x+5}$

$$\left. \begin{aligned} f \text{ est définie } &\Leftrightarrow 7x+5 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 7x \neq -5 \\ &\Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{7} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{d'où } f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{7}\right\} \\ &\text{comme } f \text{ est un quotient, } f \text{ est dérivable partout où il est} \\ &\text{défini, d'où } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{7}\right\} \end{aligned}$$

$$\text{on pose: } u(x) = 2x - 1 \quad v(x) = 7x + 5$$
$$u'(x) = 2 \quad v'(x) = 7$$

$$\begin{aligned} \text{or, } \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ d'où: } f'(x) = \frac{2(7x+5) - (2x-1) \times 7}{(7x+5)^2} \\ &= \frac{14x+10-14x+7}{(7x+5)^2} = \underline{\underline{\frac{17}{(7x+5)^2}}} \end{aligned}$$

2) $g(x) = 2\sqrt{x}(3x^4 + 2)$

$$\left. \begin{aligned} x \mapsto \sqrt{x} &\text{ est définie sur } [0; +\infty[\text{ et dérivable sur }]0; +\infty[\\ x \mapsto 3x^4 + 2 &\text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ car c'est une fonction polynôme} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{d'où } g \text{ est définie} \\ &\text{sur } [0; +\infty[\text{ et} \\ &\text{dérivable sur }]0; +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on pose: } u(x) &= 2\sqrt{x} \quad v(x) = 3x^4 + 2 \\ u'(x) &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad v'(x) = 3 \times 4x^3 = 12x^3 \end{aligned}$$

$$\text{or, } (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{d'où: } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (3x^4 + 2) + 2\sqrt{x} \times 12x^3 = \frac{3x^4 + 2}{\sqrt{x}} + \frac{24x^4}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{27x^4 + 2}{\sqrt{x}}}}$$

$$3) \quad h(x) = \frac{-4}{9x^2 + 1}$$

$9x^2 + 1 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{On pose: } u(x) = 9x^2 + 1$$

$$u'(x) = 9 \times 2x = 18x$$

$$\text{or, } \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \quad \text{et} \quad (kv)' = k \times v', \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'où: } h'(x) = -4 \times \frac{-18x}{(9x^2 + 1)^2} = \underline{\underline{\frac{72x}{(9x^2 + 1)^2}}}$$