Corrigé du DS commun n° 3

(Fait le 16/04/2024)

Exercice 1 :

a) Par lecture graphique, $f(-1) = -2$

b) $f'(-1)$: c'est le coefficient directeur de T, tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1

On a : $f'(-1) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+9}{1} = 9$

c) On a T a pour équation réduite : $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

$\iff y = 9(x+1) + (-2)$

$\iff y = 9x + 7$

d) $f'(2)$: coefficient directeur de T'

or, T' est horizontale, d'où : $f'(2) = 0$

e) Notons T_1 la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1

on a : $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

or, $f'(1) = -3$ et $f(1) = 0$

d'où : T_1 a pour équation réduite

$y = -3(x-1)$

$\iff y = -3x + 3$

T_1 passe par $M_1(0;3)$ et $M_2(1;0)$ (voir figure)

Exercice 2 :

1) $f(x) = (x+1)(\sqrt{x}-1)$

$x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}-1$ est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$

D'où : f est dérivable sur $]0;+\infty[$

On pose : $u(x) = x+1$ $\quad v(x) = \sqrt{x}-1$

$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

D'où : $f'(x) = 1 \times (\sqrt{x}-1) + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x-2\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

2) a) Soit $g(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x^2+3}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, d'où $x^2+3 \geq 3$

autrement dit : $x^2+3 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

g est donc définie sur $\mathbb{R}$

g étant un quotient, elle est dérivable partout où elle est définie

d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$

On pose : $u(x) = 2x^2+3x-1$ $\quad v(x) = x^2+3$

$u'(x) = 2 \times 2x+3 = 4x+3$ $\quad v'(x) = 2x$

or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

d'où : $g'(x) = \frac{(4x+3)(x^2+3) - 2x(2x^2+3x-1)}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{\cancel{4x^3} + 12x + 3x^2 + 9 \cancel{- 4x^3} - 6x^2 + 2x}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{-3x^2 + 14x + 9}{(x^2+3)^2}$

b) Notons (T_0) : tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse 0

on a : $(T_0) : y = g'(0)(x-0) + g(0)$

or, $g'(0) = \frac{9}{9} = 1$ et $g(0) = \frac{-1}{3}$

Donc : (T_0) a pour équation réduite : $y = x - \frac{1}{3}$

Exercice 3 : sur $[-5;5]$, $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

1) f est dérivable sur $[-5;5]$ car c'est une fonction polynôme.

$f'(x) = 3x^2 + \frac{5}{2} \times 2x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$

2) Etudions le signe de $f'(x)$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$

d'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{2\times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{2\times 3} = \frac{-12}{6} = -2$

or, le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

et $a = 3 > 0$

D'où le tableau de signes suivant :

x	-5		-2		$\frac{1}{3}$		5
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Quand $f'(x) > 0$, f est croissante et quand $f'(x) < 0$

Tableau de variations de f sur $[-5 ; 5]$:

x	-5		-2		$\frac{1}{3}$		5
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-54	$\nearrow$	$4,5$	$\searrow$	$-\frac{50}{27} \simeq -1,85$	$\nearrow$	176

$f(-5) = (-5)^3 + \frac{5}{2}(-5)^2 - 2\times(-5) - \frac{3}{2}$
$= -54$

$f(-2) = (-2)^3 + \frac{5}{2}(-2)^2 - 2\times(-2) - \frac{3}{2}$
$= 4,5$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\times\frac{1}{3} - \frac{3}{2}$
$\simeq -1,85$

$f(5) = 5^3 + \frac{5}{2}(5)^2 - 2\times 5 - \frac{3}{2}$
$= 176$

3) f' s'annule en $x = -2$ et en $x = \frac{1}{3}$

Donc : $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes horizontales

une en $x = -2$ et une en $x = \frac{1}{3}$

$A(-2 ; 4,5)$ $\quad$ $B\left(\frac{1}{3} ; \simeq -1,85\right)$

4) Bonus :

$(d) : y = -2x + 3$

Soit $(T_a) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$: (T_a) tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a

$(T_a) \parallel (d) \iff f'(a) = -2$

$\iff 3a^2 + 5a - \cancel{2} = -\cancel{2}$

$\iff a(3a+5) = 0$

$\iff a = 0$ ou $3a + 5 = 0$

$\iff a = 0$ ou $a = -\frac{5}{3}$

Il y a donc deux tangentes qui conviennent.

Donc : En 0 et en $-\frac{5}{3}$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente parallèle à (d).

Exercice 4 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = -9n^2 + (3n-1)^2$

$= \cancel{-9n^2} + \cancel{9n^2} - 6n + 1$

$= -6n + 1$

On a : $u_{n+1} - u_n = -6(n+1) + 1 - (-6n+1)$

$= \cancel{-6n} - 6 \cancel{+1} \cancel{+6n} \cancel{-1}$

d'où : $u_{n+1} - u_n = -6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (u_n) est une suite arithmétique de raison -6

et de premier terme $u_0 = -6 \times 0 + 1 = 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$

$v_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1+1}} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{5^n \times 5}{3^{n+1} \times 3^1} = \frac{5}{3} \times \frac{5^n}{3^{n+1}} = \frac{5}{3} \times v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (v_n) est une suite géométrique

de raison $\frac{5}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{5^0}{3^1} = \frac{1}{3}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}n + 2^n$

$w_0 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \times 0 + 2^0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$w_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = -2 + 2 = 0$

$w_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \times 2 + 2^2 = \frac{1}{2} - \frac{10}{2} + \frac{8}{2} = -\frac{1}{2}$

$w_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \times 3 + 2^3$
$= \frac{1}{2} - \frac{15}{2} + \frac{16}{2}$
$= 1$

On a : $w_1 - w_0 = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ et $w_2 - w_1 = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$

Alors : $w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$

Donc (w_n) n'est pas une suite arithmétique

De plus : $\frac{w_1}{w_0} = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0$ et $\frac{w_3}{w_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

on a : $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_3}{w_2}$

Donc (w_n) n'est pas une suite géométrique

Exercice 5 :

1) Contrat 1 :

u_0 : loyer payé en 2023

a) $u_1 = u_0 \times 1,04$ (car augmentation de 4 % par an)

$= 24000 \times 1,04 = 24\,960$ € loyer payé en 2024

b) Tous les ans, le loyer augmente de 4 %.

d'où : $u_{n+1} = u_n \times 1,04$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $u_0 = 24\,000$

c) Comme (u_n) est géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = 24\,000 \times 1,04^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_8 = 24000 \times 1,04^8 \simeq 32\,845,66$ €

d) $S = u_0 + u_1 + \dots + u_8 = 1^{\text{er}}\text{terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

$= u_0 \times \frac{1 - 1,04^9}{1 - 1,04} = 24\,000 \times \frac{1 - 1,04^9}{1 - 1,04}$

$\simeq 253\,987$ € à l'issue des 9 années

2) Contrat ②:

$v_0 = 24\,000$

a) $v_1 = v_0 + 1500$

$= 24\,000 + 1500 = 25\,500$ € en 2024

b) Tous les ans, le loyer augmente de 1500 €

D'où : $v_{n+1} = v_n + 1500$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 1500

et de premier terme $v_0 = 24\,000$

c) Comme (v_n) est arithmétique :

$v_n = v_0 + n \times r$

$v_n = 24\,000 + 1500n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'où : $v_8 = 24\,000 + 1500 \times 8 = 36\,000$ €

d) On a : $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_8 = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier}}{2}$

$= 9 \times \frac{24\,000 + 36\,000}{2} = 270\,000$ € sur les 9 années

e) On a $24\,000 + 1500n \geq 48\,000$

$\iff 1500n \geq 24\,000$

$\iff n \geq \frac{24\,000}{1500} = 16$

Le loyer annuel doublera à partir de $2023 + 16 = 2039$

3) Bilan : . Sur les 9 années, avec le contrat ①: 253987 €

. sur les 9 années, avec le contrat ②: 270 000 €

Le plus intéressant sur les 9 années est le contrat ①