

I) Fonction trinôme du second degré :

1) Définition :

Soient a, b, c et d , quatre réels avec $a \neq 0$.

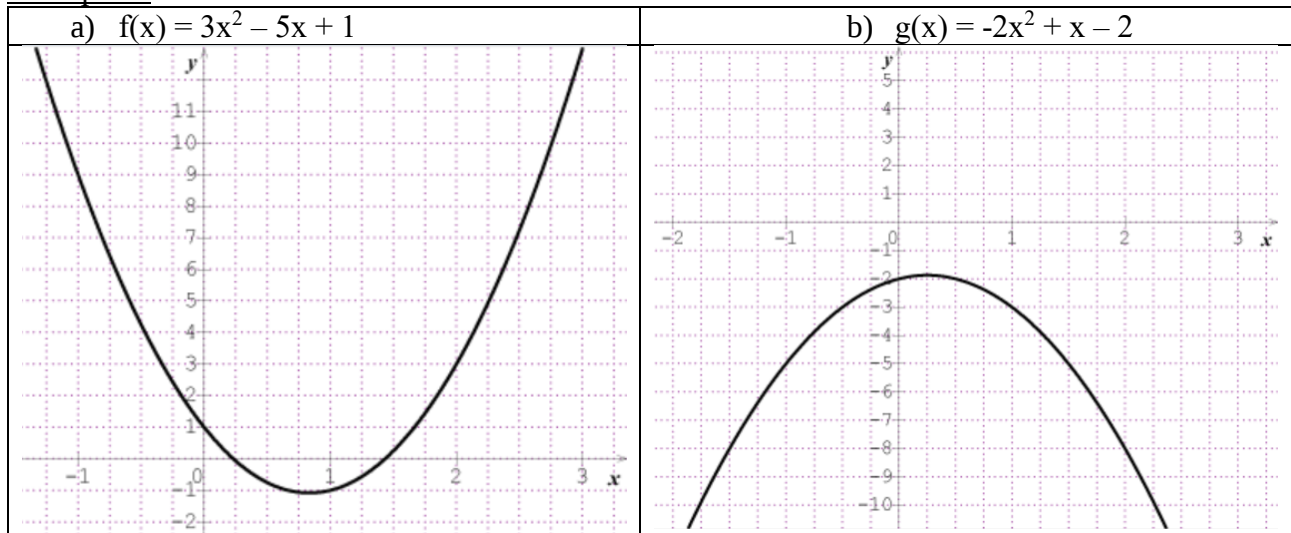
On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x associe $ax^2 + bx + c$.

La fonction f est appelée ouou encore

2) Représentation graphique :

Toute fonction trinôme du second degré se représente graphiquement sous la formedans un repère orthogonal du plan.

Exemples :



Remarque :

Le coefficient a donne l'orientation de la parabole :

- Si $a > 0$, alors la parabole est orientée
- Si $a < 0$, alors la parabole est orientée

3) Forme canonique :

On considère f , un trinôme du second degré. $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

Alors f peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = \dots\dots\dots$, où α et β sont deux réels.

Cette écriture est **unique** pour chaque f .

Cette notation s'appelle **la forme** du trinôme f .

Démonstration :

Exemples :

- a) $f(x) = 4(x - 2)^2 + 5$ est la forme canonique d'un trinôme du second degré avec : $\begin{cases} a = \dots \\ \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$
- b) $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$ (Pour voir comment obtenir la forme canonique d'un trinôme du second degré, voir : http://mangeard.maths.free.fr/Ecole/JeanXXIII/PremiereS/revisions_canonique.pdf)

4) Variations :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

Si $a < 0$	Si $a > 0$																
f est d'abord, puis	f est d'abord, puis																
<u>Tableau de variations de f :</u>	<u>Tableau de variations de f :</u>																
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>....</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variations de f</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$		$+\infty$	Variations de f				<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>....</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Variations de f</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$		$+\infty$	Variations de f			
x	$-\infty$		$+\infty$														
Variations de f																	
x	$-\infty$		$+\infty$														
Variations de f																	
Avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ Le point S de coordonnées $(\alpha ; \beta)$ est le sommet de la parabole représentant f.	Avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ Le point S de coordonnées $(\alpha ; \beta)$ est le sommet de la parabole représentant f.																

Exemple :

Soit $f(x) = -3x^2 + x - 1$

On a :

II) Equations du second degré :

1) Résolution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ avec $a \neq 0$

a) Méthode graphique : (Rappel de seconde)

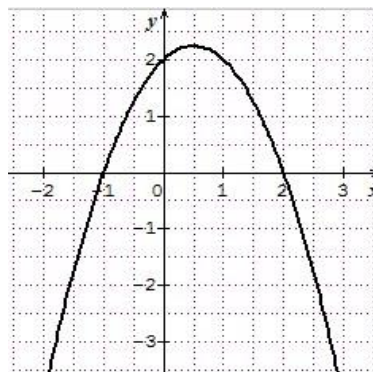
Exemple :

On considère l'équation $-X^2 + X + 2 = 0$ (E)

On pose $f(X) = -X^2 + X + 2$

Résoudre (E) revient à résoudre $f(X) = 0$

C'est-à-dire : déterminer les abscisses des points d'intersection de la parabole représentant f avec l'axe des abscisses.



Par lecture graphique, on trouve deux solutions :

b) Méthode algébrique :

On souhaite résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ avec $a \neq 0$

On va suivre l'algorithme de résolution suivant :

- On commence par calculer **le discriminant Δ** du trinôme dont l'expression en fonction des coefficients est donnée par : $\Delta = b^2 - 4ac$

3 cas vont se présenter :

- Soit $\Delta < 0$, alors

- Soit $\Delta = 0$, alors

.....

- Soit $\Delta > 0$, alors

.....

Démonstration :

Exemples :

1) Résoudre l'équation : $2X^2 - 4X + 2 = 0$

2) Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$

2) Somme et produit des racines :

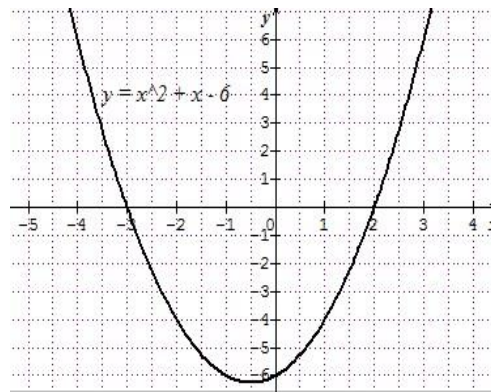
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ tel que $\Delta > 0$

Notons x_1 et x_2 , les deux racines réelles distinctes de f .

Alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ \text{et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{array}}$$

Démonstration :



Exemple d'application :

On considère $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$

a) Montrer que 1 est une racine de f.

b) En utilisant la somme ou le produit des racines de f, calculer la deuxième racine.

3) Factorisation :

On considère une équation du second degré (E) : $aX^2 + bX + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

- Si (E) n'a pas de solution, on ne peut pas factoriser $aX^2 + bX + c$
- Si (E) a une seule solution X_0 (solution double), alors $aX^2 + bX + c = \dots\dots\dots$
- Si (E) a deux solutions X_1 et X_2 , alors $aX^2 + bX + c = \dots\dots\dots$

Démonstration :

Facile en passant par la forme canonique

Exemples : $2X^2 - 4X + 2 = 2(X - 1)^2$ et $X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$

III) Signe d'un trinôme du second degré. Inéquations du second degré :

1) Exemples : découverte graphique

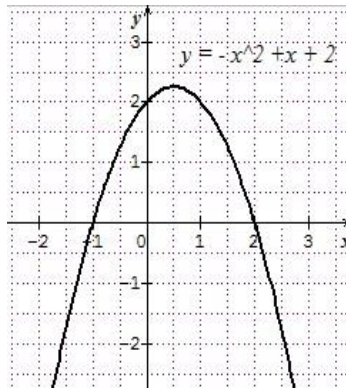
a) $f(X) = X^2 + X - 6$

Par lecture graphique :

$f(X) \geq 0$ pour $X \in] - \infty ; -3] \cup [2 ; + \infty[$ (autrement dit « à l'extérieur des racines »)

$f(X) < 0$ pour $X \in] -3 ; 2[$ (autrement dit « entre les racines »)

b) $g(X) = -X^2 + X + 2$



Par lecture graphique :

$g(X) \geq 0$ pour $X \in [-1; 2]$ (autrement dit « entre les racines »)

$g(X) < 0$ pour $X \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$ (autrement dit « à l'extérieur des racines »)

Remarque : Le coefficient de X^2 est positif pour la fonction f et négatif pour g

2) Propriété :

Soit $aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ et Δ son discriminant. Trois cas sont à envisager :

a) Soit $\Delta < 0$, alors le trinôme est **du signe de a pour toutes les valeurs de X**

b) Soit $\Delta = 0$, alors le trinôme est **du signe de a et s'annule en $X = \frac{-b}{2a}$**

c) Soit $\Delta > 0$, alors le trinôme est **du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.**

Démonstration :

a) On sait que : $aX^2 + bX + c = a[(X - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ (forme canonique)

Or, $\Delta < 0$, d'où : $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

C'est-à-dire : $(X - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$

Donc : **le trinôme est bien du signe de a** pour toutes les valeurs de X

b) Comme $\Delta = 0$, $aX^2 + bX + c = a(X - X_0)^2$ avec X_0 racine double du trinôme.

Or, $(X - X_0)^2 \geq 0$

Donc : **le trinôme est bien du signe de a** pour toutes les valeurs de X et s'annule en X_0

c) Comme $\Delta > 0$: $aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$ où X_1 et X_2 sont les deux racines du trinôme.

Supposons $X_1 < X_2$

Tableau de signes :

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
$X - X_1$	-	○	+	+
$X - X_2$	-	-	○	+
$(X - X_1)(X - X_2)$	+	○	○	+
$a(X - X_1)(X - X_2)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de $-a$	Signe de a

Donc : le trinôme est bien **du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.**

Exemples :

a) Etude du signe de $x^2 + 3x - 4$:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
x^2+3x-4	$+$	0	$-$	0	$+$

Autrement dit :

b) Résoudre l'inéquation suivante : $3x^2 - 9x - 30 < 0$