Spé maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Variations des fonctions / Exponentielle*	Fait le mardi 23 mai 2023 **SUJET B**

Exercice 1 :

On donne le tableau partiel des variations d'une fonction définie sur [-3 ;5] :

x	-3		-1		3		5
Signe de f '(x)		-	0		0	-	
Variations de f	1 ↘		-2	↗	5	↘	

On sait que : f(-3) = 1

1) Compléter ce tableau
2) Déterminer, en justifiant soigneusement, les éventuels extremums de f sur [-3 ;5]

$f'(x) = 0$, pour $x = -1$ et $x = 3$
et de plus, $f'(x)$ change de signe en $x = -1$ et en $x = 3$
D'où f admet des extremums locaux en $x = -1$ et en $x = 3$
D'après les variations, $f(-1) = -2$ est un minimum
et $f(3) = 5$ est un maximum

Exercice 2 :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur ℝ suivante : $f(x) = \frac{5e^x+1}{e^x+2}$ (sans faire son tableau de variations)

f est dérivable sur ℝ car un quotient est dérivable partout où il est défini.
Or, f est définie sur ℝ.
On pose : $u(x) = 5e^x + 1$ $\quad v(x) = e^x + 2$
$u'(x) = 5e^x \quad v'(x) = e^x$
or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, d'où : $f'(x) = \frac{5e^x(e^x+2) - e^x(5e^x+1)}{(e^x+2)^2}$

$= \frac{\cancel{5e^{2x}} + 10e^x - \cancel{5e^{2x}} - e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{9e^x}{(e^x+2)^2}$

$e^x > 0 \iff x \in \mathbb{R}$
$(e^x+2)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
D'où : $f'(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : f est strictement croissante sur ℝ

Exercice 3 :

1) Résoudre l'équation suivante sur ℝ : $e^{-2x+7} = 1$

$e^{-2x+7} = e^0 \iff -2x+7=0 \iff -2x = -7$

(car $e^a = e^b \iff a=b$) $\iff x = \frac{7}{2}$

Donc : $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

2) Résoudre l'inéquation suivante sur ℝ : $(e^x + 5)(e^{-x} - 1) \geq 0$

On a : $e^x + 5 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

de plus : $e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq e^0 \iff -x \geq 0$ (car $e^a \geq e^b \iff a \geq b$)

Donc : $S =]-\infty ; 0] = \mathbb{R}^-$

Exercice 4 :

On souhaite dresser le tableau de variations de la fonction g suivante sur ℝ définie par :
$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

1) Montrer que g est dérivable sur ℝ et que $g'(x) = x^2 - 3x + 2$

g est une fonction polynôme : elle est donc dérivable sur ℝ

$g'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2$

Donc : $g'(x) = x^2 - 3x + 2$

2) En déduire les variations de g sur ℝ et dresser son tableau de variations

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$: d'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = 1 > 0$, d'où le signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	

$$g(1) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2$$
$$= \frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{12}{6}$$
$$= \frac{5}{6}$$

$$g(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{3}{2} \times 2^2 + 2 \times 2$$
$$= \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$