Spé maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Variations des fonctions / Exponentielle*	Fait le mardi 23 mai 2023 **SUJET A**

Exercice 1 :

On donne le tableau partiel des variations d'une fonction définie sur [-3 ;5] :

x	-3		1		2		5
Signe de f '(x)		+	0	−	0	+	
Variations de f	-7	↗	2	↘	-3	↗	1

On sait que : f(-3) = -7

1) Compléter ce tableau
2) Déterminer, en justifiant soigneusement, les éventuels extremums de f sur [-3 ;5]

$f'(x) = 0$, pour $x = 1$ et pour $x = 2$
et de plus, $f'(x)$ change de signe en $x = 1$ et en $x = 2$
D'où f admet un extremum local en $x = 1$ et en $x = 2$
D'après les variations, $f(1) = 2$ est un maximum
et $f(2) = -3$ est un minimum

Exercice 2 :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur ℝ suivante : $f(x) = \frac{3e^x+2}{e^x+1}$ (sans faire son tableau de variations)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car un quotient est dérivable partout où il est défini. Or, f est définie sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = 3e^x + 2$ $\quad v(x) = e^x + 1$

$u'(x) = 3e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D'où : $$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1) - (3e^x+2)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{3e^{2x}} + 3e^x - \cancel{3e^{2x}} - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

or, $e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

De plus, $(e^x+1)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'où : $f'(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
donc : f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 :

1) Résoudre l'équation suivante sur ℝ : $e^{-3x+2} = 1$

On a : $e^{-3x+2} = e^0 \iff -3x+2=0$
(car $e^a = e^b \iff a = b$)
$\iff -3x = -2$
$\iff x = \frac{2}{3}$

Donc : $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

2) Résoudre l'inéquation suivante sur ℝ : $(e^x + 4)(e^{-x} - 1) \geq 0$

$e^x + 4 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le signe de $(e^x+4)(e^{-x}-1)$ ne dépend donc que de celui de $e^{-x}-1$

or, $e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 \iff e^{-x} \geq e^0 \iff -x \geq 0$
(car $e^a \geq e^b \iff a \geq b$)
$\iff x \leq 0$

Donc : $S =]-\infty ; 0] = \mathbb{R}^-$

Exercice 4 :

On souhaite dresser le tableau de variations de la fonction g suivante sur ℝ définie par :
$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$

1) Montrer que g est dérivable sur ℝ et que $g'(x) = x^2 - 5x + 4$

g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur ℝ

$g'(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}x^2 - \frac{5}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x + 4 = x^2 - 5x + 4$

2) En déduire les variations de g sur ℝ et dresser son tableau de variations

Signe de $g'(x)$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 4 = 9 > 0$

D'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 1 > 0$

D'où :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
signe de $g'(x)$		+	0	−	0	+	

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de g'(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	$\frac{11}{6}$	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$	$\nearrow$	

$g(1) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4$

$= \frac{2 - 15 + 24}{6}$

$= \frac{11}{6}$

$g(4) = \frac{1}{3} \times 4^3 - \frac{5}{2} \times 4^2 + 4 \times 4$

$= \frac{64}{3} - 40 + 16 = \frac{64}{3} - \frac{72}{3} = -\frac{8}{3}$

Courbe de g tracée à la calculatrice :