Spé Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Vecteurs / Equations de droites/ Résolution de systèmes 2×2*	Fait le lundi 06 février 2023

Exercice 1 :

Soient les points A(-3 ;4), B(7 ;-1) et C(-1 ;9) dans un repère du plan.

1) Déterminer en justifiant l'équation réduite de la droite (AB)

$\left.\begin{array}{l} x_A = -3 \neq 7 = x_B \\ y_A = 4 \neq -1 = y_B \end{array}\right\}$ d'où : (AB) est une droite oblique

Son équation réduite est du type $y = mx + p$

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-4}{7+3} = \dfrac{-5}{10} = -\dfrac{1}{2}$

d'où : $y = -\dfrac{1}{2}x + p$

or, $A(-3;4) \in (AB)$, d'où : $y_A = -\dfrac{1}{2}x_A + p$

$\iff 4 = -\dfrac{1}{2} \times (-3) + p$

$\iff p = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{8}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

Donc : $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ est l'équation réduite de (AB)

2) Déterminer en justifiant une équation cartésienne de la droite (BC)

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ (c'est un vecteur directeur de (BC))

Soit $M(x;y) \in (BC)$: $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y+1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de (BC)

or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires.

Donc : $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

$\iff \det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-7 & -8 \\ y+1 & 10 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 10(x-7) + 8(y+1) = 0$

$\iff 10x + 8y - 70 + 8 = 0$

$\iff 10x + 8y - 62 = 0$

c'est une équation cartésienne de (BC)

3) Déterminer l'équation réduite de la droite (d) telle que (d) // (AB) et C∈(d)

Comme (d) // (AB), $m_{(d)} = m_{(AB)} = -\dfrac{1}{2}$

D'où : $(d) : y = -\frac{1}{2}x + p$

Or, $C(-1; 9) \in (d) \iff y_C = -\frac{1}{2}x_C + p$

$\iff 9 = -\frac{1}{2} \times (-1) + p$

$\iff p = 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$

Donc : (d) a pour équation réduite :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

Exercice 2 :

Résoudre le système suivant par la méthode de votre choix en détaillant :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -16 \\ -x + 4y = 5 \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -16 \\ x = 4y - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 5(4y-5) - 2y = -16 \\ x = 4y - 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20y - 2y = 25 - 16 \\ x = 4y - 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 18y = 9 \\ x = 4y - 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \\ x = 4 \times \frac{1}{2} - 5 = 2 - 5 = -3 \end{cases}$$

Donc $S = \left\{\left(-3; \frac{1}{2}\right)\right\}$

Par combinaisons :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -16 \\ -5x + 20y = 25 \quad \times(-5) \end{cases} \iff \begin{cases} 5x - 2y = -16 \\ 18y = 9 \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

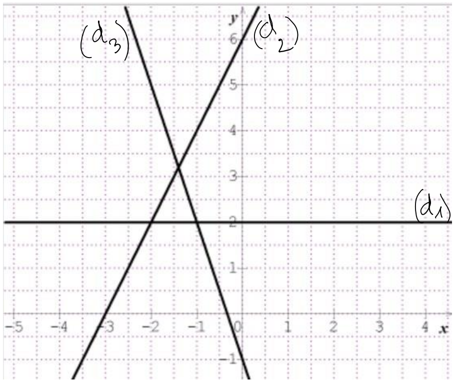
$$\iff \begin{cases} 5x - 2 \times \frac{1}{2} = -16 \\ y = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x = -16 + 5 = -15 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{-15}{5} = -3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $S = \left\{\left(-3; \frac{1}{2}\right)\right\}$

Exercice 3 :



1) Déterminer l'équation réduite de chaque droite ci-dessus en justifiant.

(d_1) est horizontale, son éq. réduite est de la forme $y = $ constante

ici : $\boxed{y = 2}$

(d_2) est oblique : $y = mx + p$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+4}{+2} = 2$ et $p = 6$ par lecture graphique

Donc : $(d_2) : y = 2x + 6$

(d_3) est oblique : $y = mx + p$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{+1} = -3$ et $p = -1$ par lecture graphique

Donc : $(d_3) : y = -3x - 1$

2) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre (d_2) et (d_3)

D'après 1), on a : $(d_2) : y = 2x + 6$

et $(d_3) : y = -3x - 1$

Comme $2 \neq -3$, (d_1) et (d_3) sont sécantes :

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -3x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 6 \\ 2x + 6 = -3x - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x + 6 \\ 5x = -7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2 \times \left(-\frac{7}{5}\right) + 6 = -\frac{14}{5} + \frac{30}{5} = \frac{16}{5} \\ x = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Donc : Le point d'intersection de (d_2) et (d_3) a pour coordonnées $\left(-\frac{7}{5} ; \frac{16}{5}\right)$

Exercice 4 :

On considère trois points A, B et C non alignés. Soient les points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{CB}$$

1) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en justifiant

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)

$\underline{\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

2) Exprimer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en justifiant

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$ (relation de Chasles)

$= \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM}}_{\vec{0}} + 3\overrightarrow{CB}$

$= 3\overrightarrow{CB} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$ (relation de Chasles)

d'où $\underline{\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}}$

3) Que peut-on dire des points M, N et P ? Le démontrer.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \text{et } \overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \end{array}\right\}$ d'où : $-\frac{1}{6}\overrightarrow{MP} = -\frac{3}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$

D'où : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires avec un point en commun

Donc : M, N et P sont alignés