

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 09 mars 2022

Candidats suivant la spécialité
mathématiques de la voie générale

Seconde partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1

Des chaussettes dans des tiroirs

« Si, dans n tiroirs, on range plus de n chaussettes alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. » C'est le principe de Dirichlet (mathématicien prussien, 1805-1859). Même si son énoncé est simple, il permet de résoudre un grand nombre de problèmes et en particulier...

Problème n°1 : Des nombres dans l'intervalle $[0 ; 1]$

1. Sur la droite des réels, on place trois réels a, b et c dans l'intervalle $[0 ; 1]$
En découpant l'intervalle $[0 ; 1]$ en deux « tiroirs » $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et $\left]\frac{1}{2} ; 1\right]$, montrer que la distance entre deux des trois réels a, b et c est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.
2. On place cinq réels dans l'intervalle $[0 ; 1]$. Montrer que la distance entre deux de ces réels est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.
3. Soit n un entier naturel non nul. Sans démonstration, donner un énoncé généralisant les affirmations des questions 1. et 2. à $n + 1$ réels dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Problème n°2 : Avec la division euclidienne par 13.

Pour rappel, nous trouvons le quotient et le reste de la division euclidienne de 53 par 13 ainsi : $53 = 13 \times 4 + 1$ et, puisque $0 \leq 1 < 13$, le quotient est $q = 4$ et le reste est $r = 1$.

En répondant aux questions ci-dessous, nous allons prouver que parmi 14 entiers naturels choisis arbitrairement, on peut toujours en trouver deux tels que leur différence soit un multiple de 13.

1. Quels sont les restes possibles d'un entier dans la division euclidienne par 13 ? Combien y en a-t-il ?
2.
 - a. Dans la division euclidienne par 13, calculer les restes des 14 entiers ci-après :
120 ; 108 ; 85 ; 112 ; 92 ; 49 ; 39 ; 53 ; 70 ; 123 ; 85 ; 132 ; 76 et 21
 - b. Parmi les entiers ci-dessus, en trouver deux dont la différence est un multiple de 13.
3. On revient au cas général : on choisit arbitrairement 14 entiers naturels.
 - a. En rangeant les 14 entiers (« chaussettes ») selon leur reste (« tiroir »), prouver qu'au moins deux de ces entiers ont même reste dans la division euclidienne par 13.
 - b. En écrivant ces deux entiers sous la forme $13q + r$ et $13q' + r$ où r, q et q' sont des entiers, prouver que la différence de ces deux entiers est un multiple de 13.

Problème n°3 : Des bêtes à mauvais caractère.

Dans un enclos rectangulaire de dimensions 15 et 18 mètres, un fermier voudrait placer 10 bêtes à mauvais caractères. Elles ne peuvent cohabiter que si elles sont distantes l'une de l'autre d'au moins 8 mètres. Est-ce possible ? Prouver votre réponse.

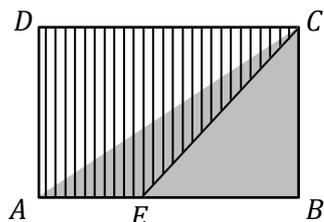
À vos tiroirs ! À vos chaussettes !

Exercice 2 La quadrature d'un polygone

L'objectif de cet exercice est de savoir si l'on peut découper un polygone quelconque en plusieurs pièces polygonales de sorte qu'en les recombinaison, **sans chevauchement ni vide**, on obtient un carré.

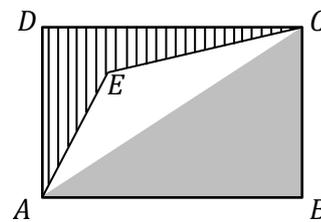
Exemple de chevauchement :

Le trapèze $ADCE$ et le triangle ABC se chevauchent au niveau du triangle ACE .



Exemple de vide :

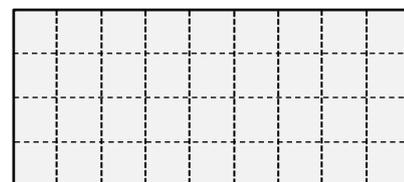
Il y a un vide entre le polygone $ADCE$ et le triangle ABC . Ce vide correspond au triangle ACE .



Dans cet exercice, vous pouvez utiliser les figures de l'annexe pour tester des découpages...

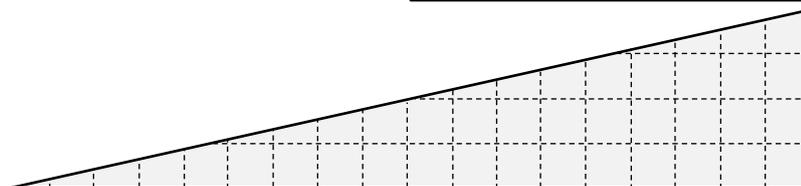
Partie A : Quelques cas particuliers

1. Montrer que le rectangle de longueur 9 et de largeur 4 peut être découpé en pièces dont la recombinaison, sans chevauchement ni vide, peut former un carré à préciser.



2.

- a. Montrer que le triangle rectangle de longueur de base 18 et de hauteur 4 peut être découpé en pièces simples dont la recombinaison, sans chevauchement ni vide, peut former un rectangle.



- b. Peut-on découper le rectangle obtenu afin de former un carré sans chevauchement ni vide ? Justifier.

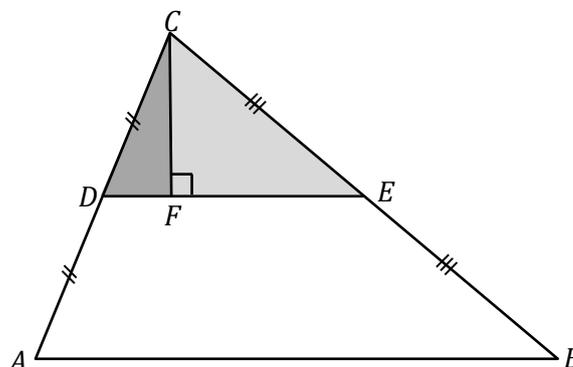
3. Peut-on découper un rectangle de longueur 6 et de largeur 4 afin de former, sans chevauchement ni vide, un carré de côté 5 ? Justifier.

Partie B : Cas généraux

1. On considère un triangle ABC .

On suppose dans les questions 4.a. et 4.b. que les angles géométriques en A et en B sont des angles aigus.

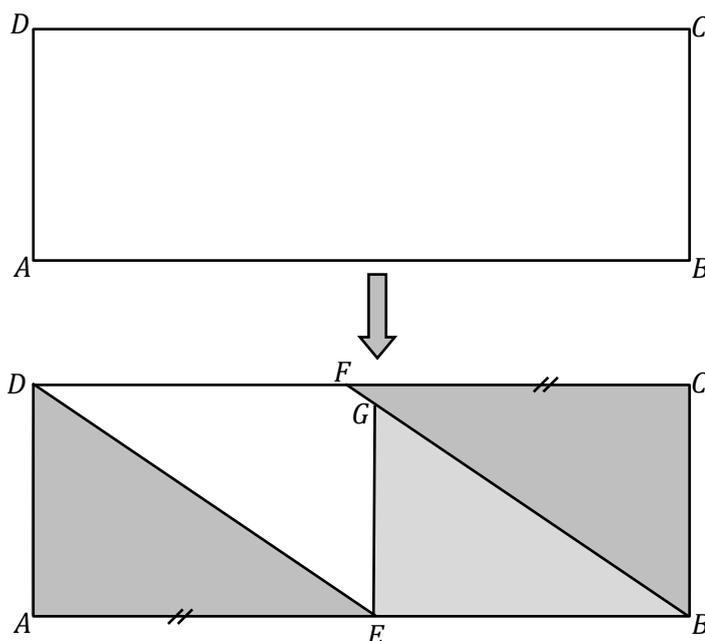
- a. On note D et E les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$. On note F le projeté orthogonal du point C sur la droite (DE) . Les angles aigus en A et en B impliquent que F appartient au segment $[DE]$. Justifier que la droite (DE) est parallèle à la droite (AB) .



- b. Justifier que les triangles DCF , CEF et le trapèze $ABED$ peuvent être combinés, sans chevauchement ni vide, de sorte à former un rectangle.
- c. L'hypothèse selon laquelle les angles en A et en B sont aigus est-elle restrictive ? Justifier.

2. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b tel que $a \geq 4b$.
Expliquer comment découper ce rectangle afin de construire un rectangle de longueur a' et de largeur b' tel que $\frac{a'}{b'} = \frac{1}{4} \times \frac{a}{b}$.

3. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b tel que $0 < b \leq a < 4b$.
On découpe ce rectangle en quatre pièces avec E le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AE = \sqrt{ab}$, F celui de $[CD)$ tel que $CF = \sqrt{ab}$ et G le point d'intersection de la droite (BF) avec la perpendiculaire à (AB) passant par E .
Ci-dessous est représenté un tel rectangle avant et après découpage.



- Justifier que le point E appartient au segment $[AB]$.
- Justifier que la perpendiculaire à (AB) passant par E coupe bien le segment $[FB]$.
- On munit la figure précédente d'un repère orthonormé $(A; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{b}\overrightarrow{AD})$.
Dans ce repère orthonormé, le point A a pour coordonnées $(0; 0)$, le point B a pour coordonnées $(a; 0)$ et le point D a pour coordonnées $(0; b)$.
Déterminer les coordonnées des points C, E et F dans ce repère.
- Justifier que le point G a pour coordonnées dans ce repère $(\sqrt{ab}; \sqrt{ab} - b)$.
- En déduire la longueur GE .
- Justifier rigoureusement que l'on peut utiliser le découpage du rectangle pour obtenir un carré, par recombinaison, sans chevauchement ni vide.

Annexe

Vous pouvez utiliser les figures de cette annexe pour tester des découpages...

