ACADÉMIE DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 09 mars 2022

Candidats suivant la spécialité mathématiques de la voie générale

Première partie – de 08h00 à 10h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1

Étiquetage gracieux d’une figure

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L’ensemble ainsi constitué est appelé *figure.*
On effectue l’*étiquetage* d’une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n, ces entiers étant distincts deux à deux.
On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.
On dit que l’*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n.
On donne ci-dessous un exemple d’*étiquetage gracieux* d’une figure comportant 6 points et 7 segments :

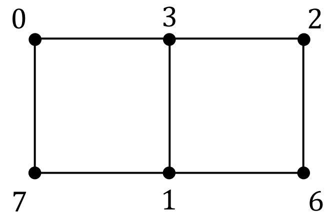


Figure étiquetée

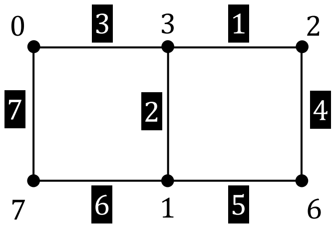
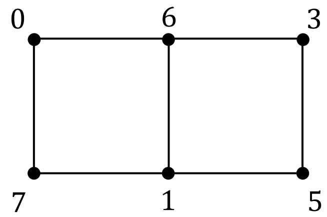
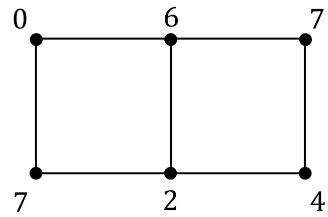


Figure étiquetée avec indication des pondérations

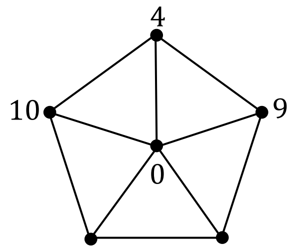
A. Des exemples

1. Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l’étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.





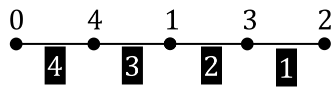
2. Compléter l’étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.



B. Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la figure L_n constituée de $n+1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l’étiquetage gracieux des points de la figure L_4.



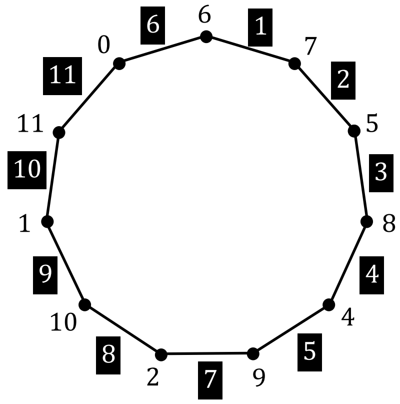
1. Montrer qu’on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5, L_6 et L_7.

2. On admet qu’on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

C. Cas des polygones

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.

2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés muni d'un étiquetage gracieux.
En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.



3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :

a. de parités différentes ;

b. de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.

D. Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que K_{2022} est constituée de $2\,043\,231$ segments.

2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de K_{2022}.

a. Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?

b. On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.

3. Montrer finalement que K_{2022} ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.

Exercice 2

Nombres sectionnables

Partie A

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable unitaire* s'il est supérieur ou égal à 3 et s'il peut s'écrire sous la forme : $1+2+3+\cdots+p$ où p est un entier supérieur ou égal à 2.
Par exemple, 3 et 10 sont des nombres sectionnables unitaires car $3 = 1 + 2$ et $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. **a.** Montrer que 21 et 136 sont sectionnables unitaires.
b. Est-ce que 1850 est sectionnable unitaire ?

2. Soit a un entier supérieur ou égal à 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que a soit un entier sectionnable unitaire.

Partie B

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable* s'il peut s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

Par exemple, 24 et 25 sont sectionnables car $24 = 7 + 8 + 9$ et $25 = 12 + 13$.
En revanche, 4 n'est pas sectionnable car $1+2<4<1+2+3$ et $2+3>4$.

1. Justifier que 9 et 15 sont sectionnables mais que 16 ne l'est pas.

2. Démontrer que si un entier est impair et supérieur ou égal à 3, alors il est sectionnable.

3. Soit k et q des entiers naturels avec $k \geqslant 2$. On pose $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$.
Montrer que $2S = k(k+1+2q)$.

4. Montrer qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.

5. On s'intéresse aux entiers strictement positifs pairs qui ne sont pas des puissances de 2.
Soit n un tel entier. On admet qu'il existe un unique couple d'entiers (r,m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n=2^r\times m$.

a. Déterminer r et m quand $n=56$. En déduire que 56 est sectionnable et l'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

b. Montrer que 44 est sectionnable.

c. Montrer que tout nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2 est sectionnable.

6. Déduire de ce qui précède l'ensemble des nombres sectionnables.

Partie C

On dit qu'un nombre entier est *uniquement sectionnable* lorsqu'il peut s'écrire de façon unique comme somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

1. Montrer que le nombre 13 est uniquement sectionnable. Le nombre 25 est-il uniquement sectionnable ?

2. **a.** Soit un entier n qui est la somme de k entiers strictement positifs consécutifs, avec $k \geqslant 3$.
On peut donc écrire n sous la forme $n=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, avec q entier positif ou nul.
Montrer que n n'est pas un nombre premier.

b. En déduire que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est uniquement sectionnable.