

Introduction :

On a tracé dans un repère orthogonal du plan la parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

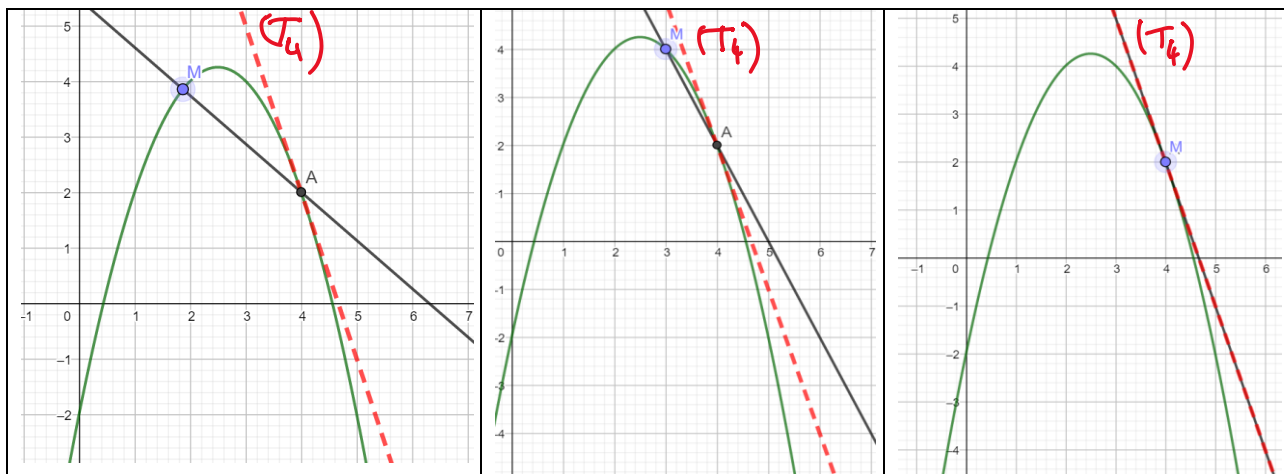
$$f(x) = -x^2 + 5x - 2$$

Le point A a pour coordonnées (4 ; 2). C'est un point de la parabole représentant f .

On place sur la parabole un point M mobile.

On trace ensuite la droite (MA).

(T_A) est la tangente à la parabole au point A. (Elle est représentée en pointillés rouges)



Plus le point M se rapproche du point A, et plus (MA) se rapproche de (T_A) pour finir par être confondue avec elle lorsque M est en A.

I) Nombre dérivé :1) Définition du taux d'accroissement d'une fonction en un point :

Si on note a l'abscisse du point A, son ordonnée est alors $f(a)$ puisque A est un point situé sur la parabole représentant f .

M étant « proche » de A, on peut noter $a + h$, l'abscisse de M avec h de plus en plus petit s'approchant de zéro au fur et à mesure que M se rapproche de A.

L'ordonnée de M est alors $f(a + h)$

La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in D_f$

On définit la fonction t par son expression en fonction de h : $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

t est appelée **taux d'accroissement de f entre a et $a + h$**

2) Définition du nombre dérivé en un point :

En fait, si h « s'approche » de zéro sans l'atteindre, alors $f(a + h)$ va « s'approcher » de $f(a)$ sans l'atteindre.

On dit qu'on va faire tendre h vers 0 (avec $h \neq 0$).

On va étudier alors les valeurs prises par le taux d'accroissement t :

Quand h tend vers 0, on va donc regarder vers quoi tend l'expression $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

On dit qu'on étudie la limite quand h tend vers 0 de $t(h)$:

Notation : $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ($h \neq 0$)

$$\text{Si } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L \in \mathbb{R}, \text{ alors } L \text{ est } \underline{\text{le nombre dérivé de } f \text{ en } a}$$

Notation : Le nombre L se note $f'(a)$ (se lit « f prime de a »)

Conséquence importante :

Comme on a vu dans l'activité que (MA) se rapproche de la tangente en A au fur et à mesure que M se rapproche de A, et que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de (MA) alors :

$f'(a)$ **est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a .**

Remarque : Si $L = -\infty$ ou $+\infty$, le nombre dérivé de f en a n'existe pas. (On dit que f n'est pas dérivable en a)

Exemples :

a) Soit f définie par $f(x) = x$

On souhaite déterminer $f'(3)$: (c'est-à-dire pour $a = 3$)

Par définition :

$$\text{Taux d'accroissement de } f \text{ en } 3 = \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{3+h-3}{h} = 1$$

$$\text{On a : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\text{Donc } \underline{f'(3) = 1}$$

b) Soit g définie par $g(x) = mx + p$, avec $m \neq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ (g est une fonction affine)

Calculer $g'(0)$:

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{m(0+h)+p-p}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

$$\text{D'où : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m \quad \text{Donc : } \underline{g'(0) = m}$$

c) Soit i définie par : $i(x) = x^2$. On souhaite calculer $i'(1)$.

$$\frac{i(1+h)-i(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h \times (h+2)}{h} = h+2$$

$$\text{D'où : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i(1+h)-i(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h+2 = 2$$

$$\text{Donc : } \underline{i'(1) = 2}$$

d) Soit j définie par $j(x) = 3x^2 - 3x + 1$. On souhaite calculer $j'(1)$

$j'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la parabole représentant j au point d'abscisse 1.

$$\begin{aligned} \frac{j(1+h)-j(1)}{h} &= \frac{3(1+h)^2-3(1+h)+1-(3 \times 1^2-3 \times 1+1)}{h} \\ &= \frac{3(1+h^2+2h)-3-3h+1-1}{h} \\ &= \frac{3+3h^2+6h-3-3h-1-1}{h} \\ &= \frac{3h^2+3h}{h} = \frac{3h \times (h+1)}{h} = 3h+3 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(1+h)-j(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3h+3 = 3$$

$$\text{Donc : } \underline{j'(1) = 3}$$

e) Soit k définie par $k(x) = x^3$. On souhaite calculer $k'(-1)$

$$\begin{aligned} \frac{k(-1+h)-k(-1)}{h} &= \frac{(h-1)^3-(-1)^3}{h} = \frac{(h-1) \times (h^2-2h+1)-(-1)}{h} \\ &= \frac{h^3-2h^2+h-h^2+2h-1+1}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{h}$$

$$= \frac{h \times (h^2 - 3h + 3)}{h}$$

$$= h^2 - 3h + 3$$

$$\text{D'où : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(-1+h) - k(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 - 3h + 3 = 3$$

$$\text{Donc : } k'(-1) = 3.$$

La tangente à la courbe en $x = -1$ a pour équation réduite $y = 3x + 2$

II) Tangente à une courbe en un point :

On considère une fonction f , (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan et $A(a; f(a))$ un point de (C_f) .

Si on note (T_a) la tangente à (C_f) au point d'abscisse a , on sait déjà que $f'(a)$ est le coefficient directeur de (T_a)

Propriété :

$$\text{L'équation réduite de } (T_a) \text{ est : } y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemples :

a) Reprenons l'exemple précédent avec la fonction cube et le point $A(-1; -1)$

On a vu que $f'(-1) = 3$

Or, $f(-1) = (-1)^3 = -1$

D'où : $y = 3(x - (-1)) - 1 = 3x + 3 - 1 = \underline{\underline{3x + 2}}$

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$

Étudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Voici un tableau de quelques valeurs de $\frac{1}{\sqrt{h}}$ quand h devient de plus en plus petit en s'approchant de zéro :

h	$\frac{1}{\sqrt{h}}$ (au centième)
0.5	1,41
0.05	4,47
0.005	14,14
0.0005	44,72
0.00005	141,42
0.000005	447,21
0.0000005	1414,21
0.00000005	4472,14
0.000000005	14142,14
0.0000000005	44721,36

Conjecture : Plus h diminue en s'approchant de zéro, plus $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient grand.

On dit que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$, lorsque h tend vers 0

Notation sous la forme de limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Par conséquent, **f'(0) n'existe pas**.

La courbe de f admet une tangente verticale en $x = 0$

III) Fonction dérivée :

1) Définition :

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si le nombre dérivé de f existe pour **toutes** les valeurs x de I, on dit que **f est dérivable sur I**.

La fonction qui à x associe $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de f** (ou la dérivée de f) et elle se note f' .

2) Dérivées de fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de dérivabilité (où la dérivée est définie)	Dérivée
$mx + p$ (avec m et $p \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n (avec $n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples :

a) Soit f définie par $f(x) = x^3$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } f'(x) = 3x^2$$

b) Soit g définie par $g(x) = \frac{4}{5}x - 2$. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Alors, } g'(x) = \frac{4}{5}$$

3) Dérivée d'une somme :

Soient u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $u + v$ est aussi dérivable sur I et

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Démonstration :

Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } (u + v)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$$

$$\text{et } u'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \quad \text{et} \quad v'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

D'où : pour tout $a \in I$, $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Exemple :

Soit $f(x) = x^4 + 7x - 2 = g(x) + h(x)$ où $g(x) = x^4$ et $h(x) = 7x - 2$

Or, $g'(x) = 4x^3$ et $h'(x) = 7$

$$\text{Donc } \boxed{f'(x) = 4x^3 + 7}$$

4) Dérivée de ku, avec $k \in \mathbb{R}$:

Soit u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$:

$$(ku) \text{ est aussi dérivable sur I et } \boxed{(ku)' = k \times u'}$$

Exemple :

Soit $f(x) = 5x^3$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5 \times 3x^2 = \underline{15x^2}$

5) Dérivée de uv :

Soient u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

$$u \times v \text{ est dérivable sur I et } \boxed{(u \times v)' = u'v + uv'}$$

Exemple :

Soit $f(x) = 7x^2 \sqrt{x}$ f est dérivable sur $]0; +\infty[$

On pose $u(x) = 7x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a : $u'(x) = 7 \times 2x = 14x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Or, $(uv)' = u'v + uv'$

D'où :

$$f'(x) = 14x\sqrt{x} + 7x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{14x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 7x^2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{28x^2 + 7x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{35x^2}{2\sqrt{x}}}$$

6) Dérivée de $\frac{1}{u}$:

On considère une fonction u . On se place sur un intervalle I sur lequel u est définie, dérivable et **où elle ne s'annule pas.**

Alors, $\frac{1}{u}$ est dérivable et :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2 + 1$ $u'(x) = 2x$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

7) Dérivée de $\frac{u}{v}$:

On considère u et v , deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on suppose que

$v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Alors : $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+1}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 4x - 1$ et $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \text{Or, } f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4(x^2+1) - 2x(4x-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 2x + 4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Remarque : il est vivement conseillé de ne pas développer le dénominateur.

En effet, on connaît son signe : c'est un carré, il est positif.

8) Dérivée de la composée $f(ax+b)$, où f est une fonction :

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, telle que $ax + b \in I$.

Alors $f(ax+b)$ est dérivable sur I et :

$$f'(ax+b) = a \times f'(ax+b)$$

Exemple :

Soit $g(x) = \sqrt{3x+2} = f(3x+2)$, où $f(x) = \sqrt{x}$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g est définie $\Leftrightarrow 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

g est dérivable $\Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$, donc : g est dérivable sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$

$$\text{De plus, } f'(3x+2) = 3 \times f'(3x+2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}$$