Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques : Sujet A** *Vecteurs et coordonnées / Equations de droites/Systèmes*	Fait le mardi 18 janvier 2022

Exercice 1 :

On considère un triangle (ABC) non aplati.

1) Montrer que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan

Comme le triangle ABC est non aplati, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
d'où : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan
donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan

2) Soient I, le milieu de [AB], J celui de [BC] et K, le point tel que : $5\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

Déterminer, en justifiant soigneusement, les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$
donc : I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$

J est le milieu de [BC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
donc : J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$5\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AI} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KA} + 2\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + 3\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$ (d'après les relations précédentes)
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AK} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
Donc : K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{5}\right)$

3) Montrer que les points I, J et K sont alignés.

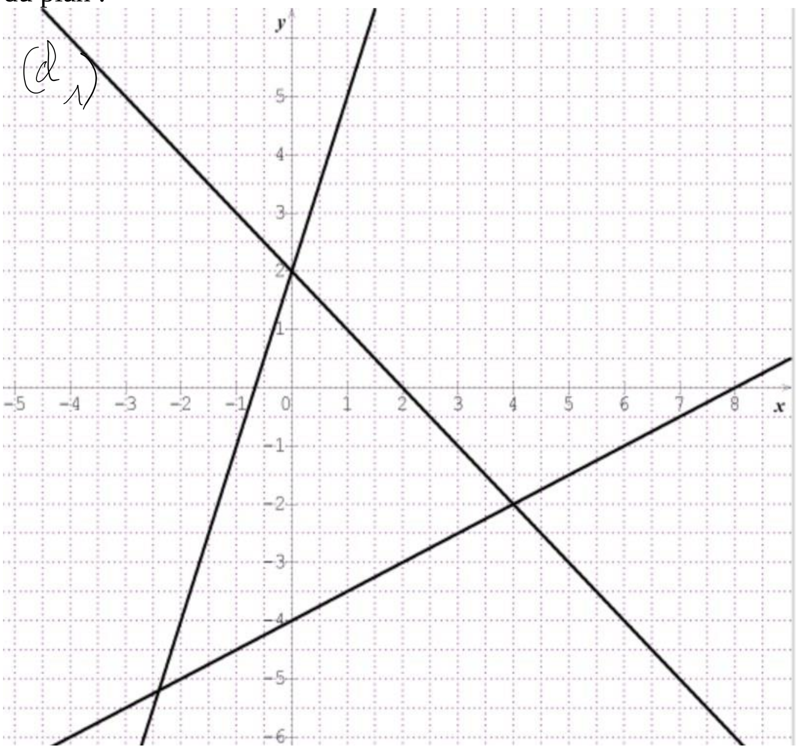
D'après 2), $I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, $J\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{5}\right)$
Alors : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}-0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

on a : $\frac{5}{2}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{2}$
d'où : $\frac{5}{2}\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ}$
donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires
c'est-à-dire : I, J et K sont alignés

Exercice 2 :

On a représenté trois droites (d_1), (d_2) et (d_3), dans un même repère du plan :



1) Déterminer par lecture graphique l'équation réduite de la droite (d_1)

c'est une droite oblique, donc son équation réduite est de la forme : $y = mx + p$

$$\begin{cases} m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{+2} = -1 \\ p = 2 \text{ (ordonnée à l'origine)} \end{cases}$$

donc :

(d_1) a pour équation réduite :

$y = -x + 2$

2) On sait que (d_2) est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$

En justifiant, déterminer l'équation réduite de la droite (d_2)

Comme (d_2) est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$, elle est oblique et son coefficient directeur est égal à $\frac{1}{2}$

Si on considère parmi les deux droites restantes celle qui passe par le point de coordonnées $(0;-4)$

on peut déterminer son coefficient directeur par lecture graphique : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+2}{+4} = \dfrac{1}{2}$

c'est donc bien (d_2) (l'autre étant plus inclinée vers le haut $m_{(d_3)} > \frac{1}{2}$)

Par lecture graphique :

$p = -4$

Donc : (d_2) a pour éq réduite :

$y = \frac{1}{2}x - 4$

3) Déterminer l'équation réduite de la droite (d_3)

On a $\begin{cases} m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+3}{+1} = 3 \\ p = 2 \end{cases}$

Donc : l'éq réduite de (d_3) est :

$y = 3x + 2$

	4) Par lecture graphique, déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d_1) avec (d_2) Par lecture graphique, on trouve : $A(4\ ;-2)$

Exercice 3 :

Soient les points A(4 ;-4) et B(-1 ;-14) dans un repère orthogonal du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-4 \\ -14+4 \end{pmatrix}$

donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Soit $M(x ; y) \in (AB)$:

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+4 \end{pmatrix}$

or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont deux vecteurs directeurs de la même droite
ils sont donc colinéaires.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x-4 & -5 \\ y+4 & -10 \end{vmatrix} = 0$

$\iff -10(x-4) - (y+4)\times(-5) = 0$

$\iff -10x + 5y + 40 + 20 = 0$

$\iff -10x + 5y + 60 = 0$

On peut simplifier tous les coefficients par 5.

d'où : $-2x + y + 12 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

On suppose qu'une droite (d) a pour équation réduite : y = $-\frac{4}{5}x + 2$

2) Déterminer une équation cartésienne de (d)

On a : $y = -\frac{4}{5}x + 2 \iff \frac{4}{5}x + y - 2 = 0$

$\iff 4x + 5y - 10 = 0$ est une équation cartésienne de (d)

3) Montrer que (d) et (AB) sont sécantes

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b = -5 \\ a = 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

On a : $x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\vec{u}}$, mais $y_{\overrightarrow{AB}} \neq y_{\vec{u}}$, d'où : il n'existe pas de réel $k \neq 0$, tel que : $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$

donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires

Autrement dit : Les droites (AB) et (d) sont sécantes

4) Montrer que calculer les coordonnées de leur point d'intersection revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ -4x - 5y = -10 \end{cases}$$

Soient $(x ; y)$ les coordonnées de leur point d'intersection :

$(x ; y)$ vérifient toutes les éq. cartésiennes de (AB), en particulier :

$-2x + y + 12 = 0 \iff 2x - y = 12$

d'autre part : il en est de même pour les équations de (d), d'où :

$4x + 5y - 10 = 0 \iff -4x - 5y = -10$

donc : $(x ; y)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ -4x - 5y = -10 \end{cases}$$

5) En déduire le calcul des coordonnées de ce point.

$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ -4x - 5y = -10 \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{cases} y = 2x - 12 \\ -4x - 5(2x - 12) = -10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x - 12 \\ -4x - 10x = -60 - 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x - 12 \\ -14x = -70 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \times 5 - 12 = -2 \\ x = \dfrac{-70}{-14} = 5 \end{cases}$$

Donc : Les coordonnées du point d'intersection sont $(5 ; -2)$