

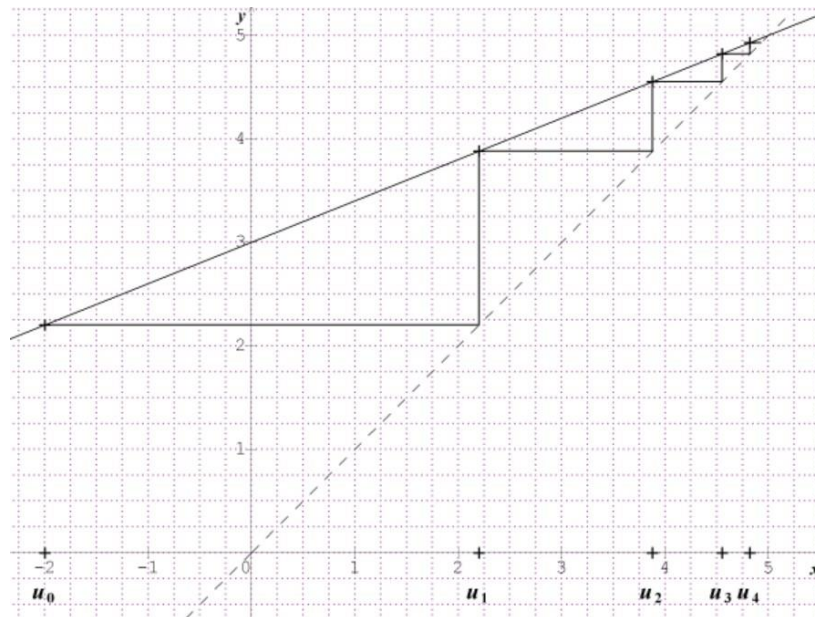
Spé Maths Première (M Mangeard)	Corrigé du devoir de mathématiques : Suites numériques (Représentation en escalier/Variations/Calculatrice/Algorithmes/Programmes en Python)	Fait le mardi 07/12/2021
---------------------------------------	---	--------------------------------

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) Représenter les cinq premiers termes de la suite (u_n) dans le repère ci-dessous (On laissera les traits de construction)



2) A partir de cette représentation, en déduire les conjectures suivantes (faire une phrase à chaque fois) :

- Variations : *Il semble que la suite soit strictement croissante*
- Comportement à l'infini : *Plus n augmente, plus u_n semble se rapprocher de 5*
Autrement dit: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 5$

3) Tabuler cette suite sur la calculatrice et compléter le tableau suivant (arrondir chaque résultat à 10^{-5} près) :

n	5	10	14	15	17	20
u_n	4,92832	4,99927	4,99998	5	5	5

4) Voici une fonction écrite en Python, mais incomplète pour calculer u_n :

```
def u(n):
    u = -2
    for i in range(1, n+1):
        u = (2/5)*u + 3
    return u
```

Compléter les pointillés ci-dessus.

5) a) Quel est le plus petit entier naturel n , à partir duquel $u_n > 4,99$?

à la calculatrice, on trouve à partir du rang $n=8$

b) On souhaite écrire un programme qui permet d'afficher cet entier n . Voici quatre programmes écrits en Python pour résoudre ce problème :

<u>Programme 1</u>	<u>Programme 2</u>	<u>Programme 3</u>	<u>Programme 4</u>
<pre>N=0 while u(N) > 4.99 : N=N+1 print(N)</pre>	<pre>N=0 while u(N) <= 4.99 : N=N+1 print(N)</pre>	<pre>N=0 while u(N) > 4.99 u=u+1 print(u)</pre>	<pre>N=0 while u(N) <= 4.99 u=u+1 print(u)</pre>

Lequel est celui qui correspond ? *c'est le prog n° 2* Justifier brièvement :

Après l'initialisation de N à 0, la condition du "while" est $u(N) \leq 4,99$ (ce qui est vrai pour $N=0$). Dès que la condition n'est plus vérifiée, on affiche le dernier rang N obtenu. On est alors certain d'obtenir le 1^{er} rang à partir duquel $u_n > 4,99$

Exercice 2 :

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la fonction Python ci-dessous :

```
def v(n):
    return (5/n**2)
```

1) Déterminer la définition mathématique de la suite (v_n) : *$v_n = \frac{5}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$* (définition explicite en fonction de n)

2) Tabuler cette suite à la calculatrice et en déduire les conjectures suivantes :

- Variations : *(v_n) semble décroissante*
- Comportement à l'infini : *Il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$*

3) Etudier les variations de la suite (v_n) :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{5}{(n+1)^2} - \frac{5}{n^2} \\
 &= \frac{5n^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{5(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\
 &= \frac{5n^2 - 5(m^2 + 2m + 1)}{n^2(n+1)^2} \\
 &= \frac{5n^2 - 5n^2 - 10n - 5}{n^2(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-10n - 5}{n^2(n+1)^2} \\
 \text{Or, } n \in \mathbb{N}^*, \text{ d'où } -10n - 5 < 0 \text{ et } n^2(n+1)^2 > 0 \} &\text{ d'où } \frac{-10n - 5}{n^2(n+1)^2} < 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

Donc : (v_n) est une suite strictement décroissante

4) Que permet de faire l'algorithme suivant ? (Justifier) :

```
N ← 1
Tant que  $5/N^2 \geq 0.5$ 
  N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

c'est un algorithme de seuil. Il permet de déterminer le plus petit entier naturel n , à partir duquel $v_n < 0,5$

Programme Python correspondant (pas demandé)

```
N = 1
while 5/N**2 >= 0.5 :
    N = N + 1
print(N)
```