Spé Maths Première (M Mangeard)	**<u>Corrigé du devoir de mathématiques :</u>** *Second degré et suites*	Fait le mardi 09 novembre 2021

<u>Exercice 1 :</u>

Résoudre les deux équations et l'inéquation suivantes en détaillant les calculs et en donnant les justifications nécessaires :

1) $5x^2 - 3x - 68 = 0$ $\begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -68 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-68)$

$= 9 + 1360$

$= 1369 > 0$: d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{1369}}{2\times 5} = \dfrac{3+37}{10} = \dfrac{40}{10} = 4$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{1369}}{2\times 5} = \dfrac{3-37}{10} = \dfrac{-34}{10} = -\dfrac{17}{5}$

Donc : $S = \left\{4 ; -\dfrac{17}{5}\right\}$

2) $7y^2 - 4y + 1 = 4$

$\Leftrightarrow 7y^2 - 4y + 1 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 7y^2 - 4y - 3 = 0$ $\begin{cases} a = 7 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 7 \times (-3)$

$= 16 + 84 = 100 > 0$: d'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+10}{7\times 2} = \dfrac{14}{14} = 1$

$y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-10}{7\times 2} = \dfrac{-6}{14} = -\dfrac{3}{7}$

Donc : $S = \left\{1 ; -\dfrac{3}{7}\right\}$

3) $2x^2 + 3x + 1 > 0$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 3^2 - 4 \times 2 \times 1$

$= 9 - 8 = 1 > 0$: le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+1}{2\times 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-1}{2\times 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 2 > 0$

Donc : $S = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$

Exercice 2 :

On considère le trinôme f suivant : $f(x) = 25x^2 – 20x + 4$ $\begin{cases} a = 25 \\ b = -20 \\ c = 4 \end{cases}$

1) Etudier les variations de f en justifiant soigneusement.

$a = 25 > 0$: d'où f est d'abord décroissante, puis croissante

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{2 \times 25} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 5 \times \cancel{5}} = \frac{2}{5}$

$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{2}{5}\right)$
$= 25 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 20 \times \frac{2}{5} + 4$
$= \cancel{25} \times \frac{4}{\cancel{25}} - 4 \times 2 + 4$
$= 0$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Variations de f		↘	0	↗	

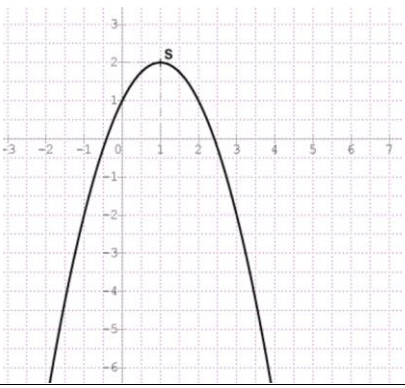
2) Factoriser f(x) en justifiant

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (20)^2 - 4 \times 25 \times 4$
$= 400 - 400 = 0$: d'où f admet une seule racine réelle $x_0 = \frac{-b}{2a}$
$= \alpha = \frac{2}{5}$

D'où f se factorise sous la forme : $f(x) = a(x - x_0)^2$

donc : $f(x) = 25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2$

Exercice 3 :



On a $S(1;2)$ d'où $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

or, la forme canonique de f est donnée par : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
$= a(x - 1)^2 + 2$

Par lecture graphique, $f(0) = 1$

d'où : $a(0 - 1)^2 + 2 = 1$

$\Leftrightarrow a + 2 = 1$

$\Leftrightarrow a = 1 - 2 = -1$

Donc : $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$

Exercice 4 : Problème

Dans une usine d'appareils ménagers, le coût total de fabrication de x appareils est donné par :

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 8x + 500, \text{ pour } x \in [0\,;600] \quad (C(x) \text{ est exprimé en euros (€)})$$

1) Déterminer la quantité à partir de laquelle le coût total est supérieur à 4 700 €

$C(x) \geq 4700 \iff 0{,}02x^2 + 8x + 500 \geq 4700$

$\iff 0{,}02x^2 + 8x - 4200 \geq 0$ $\begin{cases} a = 0{,}02 \\ b = 8 \\ c = -4200 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 8^2 - 4 \times 0{,}02 \times (-4200)$

$= 400 > 0$: le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+20}{0{,}04} = \dfrac{12}{0{,}04} = 300$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-20}{0{,}04} = \dfrac{-28}{0{,}04} = -700$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

Or, $a = 0{,}02 > 0$

D'où $0{,}02x^2 + 8x - 4200 \geq 0$, pour $x \geq 300$

Donc le coût total est supérieur à 4 700 € pour la vente de plus de 300 appareils

2) On appelle p, le prix de vente (en €) d'un appareil. ***Dans cette question p = 17,5***

a) Exprimer le bénéfice B(x) en fonction de x et vérifier que : $B(x) = -0{,}02x^2 + 9{,}5x - 500$

On a : $R(x)$: recette

$R(x) = p \times x = 17{,}5x$

Or, $B(x) = R(x) - C(x)$

$= 17{,}5x - (0{,}02x^2 + 8x + 500)$

$= -0{,}02x^2 + 9{,}5x - 500$

b) Déterminer par calcul le nombre d'appareils à fabriquer pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ou nul.

$B(x) \geq 0 \iff -0{,}02x^2 + 9{,}5x - 500 \geq 0$ $\begin{cases} a = -0{,}02 \\ b = 9{,}5 \\ c = -500 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9{,}5^2 - 4 \times (-0{,}02) \times (-500)$

$= 50{,}25 > 0$: le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9{,}5+\sqrt{50{,}25}}{-0{,}04} \simeq 60{,}3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9{,}5-\sqrt{50{,}25}}{-0{,}04} \simeq 414{,}7$$

Le binôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = -0{,}02 < 0$

D'où $B(x) \geq 0$, pour $x \in [x_1 ; x_2]$

Par conséquent : Pour réaliser un bénéfice positif ou nul, l'entreprise doit fabriquer entre 61 et 414 appareils.

3) ***Dans cette question, on ne connaît pas la valeur de p***

On sait que l'entreprise réalise un bénéfice maximal lorsqu'elle fabrique 300 appareils.

Calculer p.

$R(x) = p \times x = px$

On a : $B(x) = R(x) - C(x)$

$= px - (0{,}02x^2 + 8x + 500)$

$= -0{,}02x^2 + x(p-8) + 500$

On a : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(p-8)}{2\times(-0{,}02)} = \frac{8-p}{-0{,}04} = 300$ (d'après l'énoncé)

$\Leftrightarrow 8 - p = 300 \times (-0{,}04)$

$\Leftrightarrow p = 8 + 300 \times 0{,}04 = 8 + 12 = 20$

Si l'entreprise vend ses appareils 20 € l'unité, elle réalise un bénéfice maximal pour la vente de 300 appareils.

Exercice 5 :

On définit les deux suites (u_n) et (v_n) de la manière suivante :

$u_n = (3n-1)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 3 \\ v_0 = 6 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n)

$u_0 = (3\times0-1)^2 = (-1)^2 = \boxed{1}$ | $u_1 = (3\times1-1)^2 = 2^2 = \boxed{4}$ | $u_2 = (3\times2-1)^2 = 5^2 = \boxed{25}$ | $u_3 = (3\times3-1)^2 = 8^2 = \boxed{64}$

2) Même chose avec la suite (v_n)

$v_0 = 6$ | $v_1 = \frac{1}{2}v_0 - 3 = \frac{1}{2}\times6 - 3 = 3 - 3 = 0$ | $v_2 = \frac{1}{2}v_1 - 3 = \frac{1}{2}\times0 - 3 = -3$ | $v_3 = \frac{1}{2}v_2 - 3 = \frac{1}{2}\times(-3) - 3 = -\frac{3}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{9}{2}$

3) a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n en simplifiant.

$$\underline{u_{n+1}} = (3(n+1)-1)^2$$
$$= (3n+3-1)^2$$
$$= (3n+2)^2$$
$$= 9n^2 + 2 \times 3n \times 2 + 4$$
$$= \underline{9n^2 + 12n + 4}$$

b) Même chose avec u_{2n}

$$\underline{u_{2n}} = (3 \times 2n - 1)^2$$
$$= (6n-1)^2$$
$$= 36n^2 - 2 \times 6n \times 1 + 1$$
$$= \underline{36n^2 - 12n + 1}$$

4) On souhaite représenter les premiers termes de la suite (v_n). Compléter la figure ci-dessous en laissant les traits de construction :

ATTENTION : *Il y a eu une erreur sur le tracé de la droite ci-dessous. Cela n'empêche pas de placer les termes avec la construction vue en cours.*

En revanche, il ne s'agit pas des termes de la suite (v_n)