Spé Maths Première (M Mangeard)	**<u>Corrigé du devoir de mathématiques : Sujet B</u>** *<u>Vecteurs et coordonnées / Equations de droites/Systèmes</u>*	Fait le mardi 18 janvier 2022

<u>Exercice 1 :</u>

On considère un triangle (ABC) non aplati.

1) Montrer que $(A;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan

Comme le triangle ABC est non aplati, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

d'où : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan

donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan

2) Soient I, le milieu de [AB], J celui de [BC] et K, le point tel que : $8\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AJ} + 5\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

$(A;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Déterminer, en justifiant soigneusement, les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$

donc : I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$

J est le milieu de [BC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

donc : J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$8\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AJ} + 5\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 8\overrightarrow{KA} + 3\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + 5\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 8\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 8\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AC}$

donc : K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{16}\right)$

3) Montrer que les points I, J et K sont alignés.

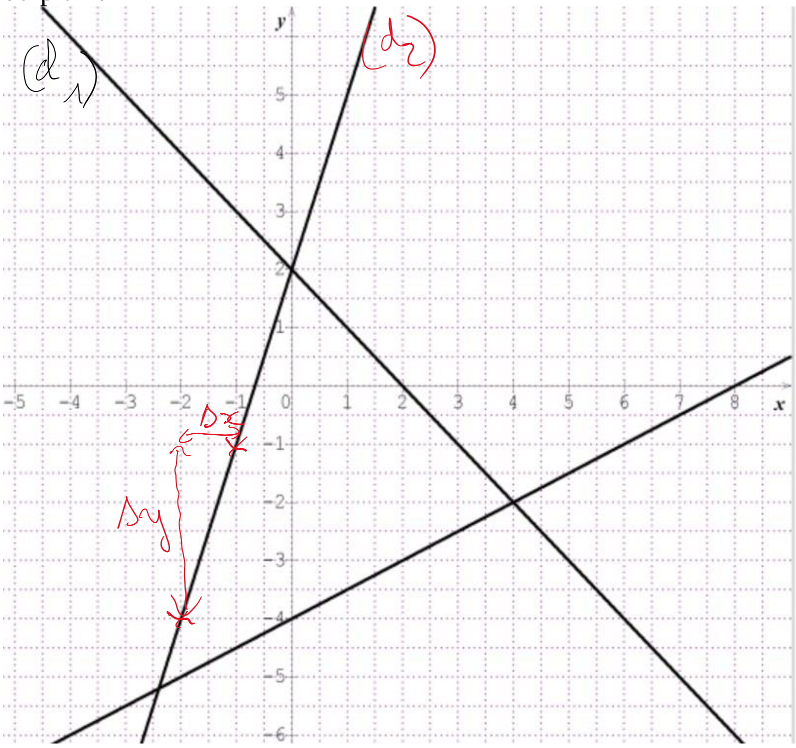
$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{16}-0\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{16}\end{pmatrix}$

On a : $\frac{3}{8}\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IK}$, d'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires

Autrement dit : I, J et K sont alignés

Exercice 2 :

On a représenté trois droites (d_1), (d_2) et (d_3), dans un même repère du plan :



1) Déterminer par lecture graphique l'équation réduite de la droite (d_1)

c'est une droite oblique, donc son équation réduite est de la forme : $y = mx + p$

$$\begin{cases} m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+2} = -1 \\ p = 2 \text{ (ordonnée à l'origine)} \end{cases}$$

donc :

(d_1) a pour équation réduite :

$y = -x + 2$

2) On sait que (d_2) est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$

Considérons parmi les deux droites restantes, celle qui passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$

Par lecture graphique,

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+3}{+1} = 3$

c'est donc bien la droite cherchée.

On a : $p = 2$

En justifiant, déterminer l'équation réduite de la droite (d_2)

Donc : L'équation réduite de (d_2) est :

$y = 3x + 2$

3) Déterminer l'équation réduite de la droite (d_3)

Par lecture graphique : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2}{+4} = \frac{1}{2}$

et $p = -4$

Donc : l'éq réduite de (d_3) est :

$y = \frac{1}{2}x - 4$

4) Par lecture graphique, déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d_1) avec (d_2)

On a : $A(0 ; 2)$

Exercice 3 :

Soient les points A(-2 ;$\frac{7}{2}$) et B(1 ;8) dans un repère orthogonal du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+2\\ 8-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y) \in (AB)$:

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\ y-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (AB)

or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires

d'où : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ y-\frac{7}{2} & \frac{9}{2}\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}(x+2)-3\left(y-\frac{7}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}x-3y+9+\frac{21}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}x-3y+\frac{39}{2}=0$$

On peut multiplier tous les coefficients par 2 :

$9x-6y+39=0$ est une équation cartésienne de (AB)

On suppose qu'une droite (d) a pour équation réduite : y = $\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$

2) Déterminer une équation cartésienne de (d)

On a : $y=\frac{1}{4}x+\frac{11}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x+y-\frac{11}{4}=0$

on peut multiplier tous les coefficients par 4 :

$-x+4y-11=0$ est une éq. cartésienne de (d)

3) Montrer que (d) et (AB) sont sécantes

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}-b=-4\\ a=-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

or, $\det(\overrightarrow{AB};\vec{u})=\begin{vmatrix}3 & -4\\ \frac{9}{2} & -1\end{vmatrix}=3\times(-1)-\frac{9}{2}\times(-4)$

$=-3+18=15\neq 0$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Autrement dit : (AB) et (d) sont sécantes

4) Montrer que calculer les coordonnées de leur point d'intersection revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -13 \\ -x + 4y = 11 \end{cases}$$

$(x;y)$ solution de : $9x - 6y + 39 = 0$, car le point cherché est situé sur (AB)

$\Leftrightarrow 3x - 2y + 13 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = -13$

de même : le point d'intersection est situé sur (d), d'où :

$-x + 4y - 11 = 0$

$\Leftrightarrow -x + 4y = 11$

Donc : calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) avec (AB) consiste à résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = -13 \\ -x + 4y = 11 \end{cases}$

5) En déduire le calcul des coordonnées de ce point.

Par substitution :

$$\begin{cases} 3(4y - 11) - 2y = -13 \\ x = 4y - 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y - 2y = 33 - 13 = 20 \\ x = 4y - 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 20 \\ x = 4y - 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{10} = 2 \\ x = 4 \times 2 - 11 = 8 - 11 = -3 \end{cases}$$

Donc : Le point d'intersection des droites (d) et (AB) a pour coordonnées $(-3;2)$