

Olympiades nationales de mathématiques

Mardi 23 mars 2021

Candidats suivant la spécialité
mathématiques

Première partie – de 13h00 à 15h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1

Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier

On rappelle qu'un nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m . Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n .

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021 ?
2. Quelle est la somme des diviseurs de 6 ? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

À tout nombre entier naturel non nul n , on associe le nombre $N(n)$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.

3. Pour chacun des nombres 6, 101, 361, 2 021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n + 1)N(n)$$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.

- a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$

- b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

- c. En déduire, pour des nombres d et q tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

- d. En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n + 1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. a. Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n + 1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n , l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

- b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

- c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2

Entiers N – décomposables

On donne un entier N supérieur ou égal à 1.

On dit qu'un entier naturel k est N –décomposable s'il existe des entiers naturels q et r tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est 21 – décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times 21 + 4 \end{cases}$, le nombre 28 est 64 –décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times 64 + 16 \end{cases}$.

A. Quelques exemples

1. **a.** Le nombre 7 est-il 22 –décomposable ? Est-il 10 –décomposable ?

b. Le nombre 45 est-il 100 –décomposable ?

2. **a.** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1 –décomposables.

b. Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2 –décomposables.

3. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.

a. Le nombre N est-il N –décomposable ?

b. Prouver que $N - 1$ est N –décomposable.

c. Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas N –décomposable.

B. Une étude des nombres N –décomposables

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.

1. **a.** Prouver que si k est N –décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.

b. Quels sont les entiers 3 –décomposables ? Quels sont les entiers 4 –décomposables ?

2. Prouver que si $N \geq 2$ et si k est N –décomposable, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers vérifiant le système (S).

3. **a.** Soit k un nombre N –décomposable. Justifier qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N - 1) = 0$.

b. Prouver que, réciproquement, si k est un entier naturel et qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N - 1) = 0$, alors k est N –décomposable.

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est 2^{2p} –décomposable.

4. Prouver que si k est N –décomposable, alors $N - k$ est N –décomposable.

5. Dans cette question, on suppose que N est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas N –décomposable.

6. Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers N –décomposables.

7. Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers N –décomposables.

8. On donne un entier k supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers N tels que k soit N –décomposable.