Spé Maths Première	**Chapitre VI : Suites (Partie 2)**	Année scolaire 2020/2021

I) Suites arithmétiques :

1) Définitions :

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que cette suite est **arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

Le réel r est appelé **la raison** de la suite.

Exemple :

On considère la suite suivante : 4;7;10;13;16;19;22;25;28;31

On pose $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$, etc...

Cette suite comporte 10 termes et chacun (sauf le premier) s'obtient en ajoutant 3 au précédent.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

2) Expression du terme général :

a) Dans un premier temps, on va chercher à exprimer u_n en fonction de u_0 :

Propriété :

$$\boxed{\text{Si } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite arithmétique de raison } r \text{, alors, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr}$$

Remarque : La démonstration rigoureuse de ce résultat sera faite en Terminale quand les raisonnements par récurrence auront été étudiés.

Illustration (pour comprendre le mécanisme) :

$(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r.

On écrit la définition à tous les ordres :

$$u_n = u_{n-1} + r$$
$$u_{n-1} = u_{n-2} + r$$
$$u_{n-2} = u_{n-3} + r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_3 = u_2 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$u_1 = u_0 + r$$

Ensuite, on ajoute toutes les lignes précédentes :

$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$$
$$\cancel{u_{n-1}} = \cancel{u_{n-2}} + r$$
$$\cancel{u_{n-2}} = \cancel{u_{n-3}} + r$$
$$\cancel{\ldots}\ldots\ldots\ldots$$
$$u_3 = \cancel{u_2} + r$$
$$\cancel{u_2} = \cancel{u_1} + r$$
$$\cancel{u_1} = u_0 + r$$

Dans le membre de gauche, il va rester u_n et dans celui de droite $u_o + r + r + r + r + ... + r$

En fait, il y a n lignes donc n fois le nombre r. D'où la formule :

$$u_n = u_0 + nr$$

b) Parfois, on ne connaît pas u_0, et il serait pratique d'avoir u_n en fonction d'un autre terme de la suite.

Propriété :

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout n ∈ ℕ et tout p∈ ℕ

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Démonstration :

D'après la propriété vue dans le a), $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$

D'où : $u_n - nr = u_p - pr$ c'est-à-dire $\underline{u_n =} u_p + nr - pr = \underline{u_p + (n - p)r}$

Exemple :

Calculer u_{30} sachant que (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 11$ et $u_{10} = 4$

On commence par calculer la raison en écrivant u_{10} en fonction de u_3:

$u_{10} = u_3 + (10 - 3) \times r$

$4 = 11 + 7r$

$- 7 = 7r$

Donc $r = - 1$

Ensuite, on calcule $u_{30} = u_{10} + (30 - 10) \times (-1) = 4 - 20 = \underline{\mathbf{-16}}$

3) Somme des n premiers entiers :

Soit n∈ ℕ , alors $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque « historique » :

On raconte que le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) aurait eu une punition quand il était enfant qui consistait à écrire la somme des 100 premiers entiers. Il a répondu à la question avec une très grand rapidité : 5050.

La méthode qu'il a utilisée va nous permettre de montrer la formule à l'ordre n.

Démonstration :

On écrit la somme dans un sens puis en-dessous dans l'autre :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + \ldots + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots & & + & 2 & + & 1 \\ \hline \end{array}$$

On ajoute les termes les uns en-dessous des autres :

On obtient : $2S = (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1)$

Il y a n termes en tout :

Donc $2S = n(n + 1)$

Par conséquent : $S = \frac{n(n+1)}{2}$

4) Somme des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on note :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Alors :

$$S_n = (n + 1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$$

De manière générale :

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{Premierterme+Dernierterme}{2}$$

Exemple d'application :

Calculer $S = 159 + 164 + 169 + 174 + 179 + \ldots + 479$

Tout d'abord, on pose $u_0 = 159$, $u_1 = 164$, $u_2 = 169$, … $u_n = 479$

On passe d'un terme suivant en ajoutant 5, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 5.

Déterminons le rang n correspondant au terme valant 479

D'après la formule vue précédemment, $u_n = 159 + nx5$

D'où : $479 = 5n + 159$

D'où : $n = \frac{479-159}{5} = 64$

Pour calculer le nombre de termes de cette suite on fait : $64 - 0 + 1 = 65$

Il y a 65 termes.

Donc : $S = 65 \text{ x } \frac{159+479}{2} =$ **<u>20 735</u>**

<u>II) Suites géométriques :</u>

<u>1) Définitions :</u>

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que (u_n) est une suite **<u>géométrique</u>** si et seulement si il existe un réel q tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} = qu_n}$$

Le nombre q est appelé **<u>la raison</u>** de la suite.

Exemple :

On considère la suite suivante :

240-120-60-30-15-7,5-3,75

On pose $u_1 = 240$, $u_2 = 120$, $u_3 = 60$, $u_4 = 30$, $u_5 = 7,5$ et $u_6 = 3,75$

Chaque terme sauf le premier s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{1}{2}$donc :

(u_n) <u>est une suite géométrique de raison</u> $\frac{1}{2}$

<u>2) Expression du terme général :</u>

a) Dans un premier temps, on va chercher à exprimer u_n en fonction de u_0 :

<u>Propriété :</u>

$$\boxed{\text{Si } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite géométrique de raison q , alors, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \text{ x } q^n}$$

<u>Remarque :</u> même chose que pour les suites arithmétiques : la démonstration rigoureuse se fera par récurrence

Illustration (pour comprendre le mécanisme) :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q :

On écrit la définition à tous les ordres :

$$u_n = qu_{n-1}$$
$$u_{n-1} = qu_{n-2}$$
$$u_{n-2} = qu_{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_2 = qu_1$$
$$u_1 = qu_0$$

On multiplie ces égalités entre elles :

$$u_n = q\cancel{u_{n-1}}$$
$$\cancel{u_{n-1}} = q\cancel{u_{n-2}}$$
$$\cancel{u_{n-2}} = q\cancel{u_{n-3}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_2 = q\cancel{u_1}$$
$$\cancel{u_1} = qu_0$$

Après simplifications, il reste :

$$u_n = u_0\underbrace{xqxqxqxqx...xq}_{\text{n facteurs tous égaux à q}} \qquad = u_0xq^n$$

b) Parfois, on ne connaît pas u_0, et il serait pratique d'avoir u_n en fonction d'un autre terme de la suite.

Propriété :

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$
$u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration :
D'après la propriété vue dans le a) , $u_n = u_0 x q^n$ et $u_p = u_0 \times q^p$
D'où : $u_n = \frac{u_p}{q^p} x q^n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple :
Calculer u_{15} sachant que (u_n) est une suite géométrique de raison strictement positive telle que $u_8 = 6$ et $u_{10} = 2$
On calcule la raison :
$u_{10} = u_8 x q^2$ d'où : $2 = 6 \times q^2$
D'où : $q^2 = \frac{1}{3}$
Comme $q > 0$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$
On a $u_{15} = u_{10} x (\frac{1}{\sqrt{3}})^5$
$= 2x(\frac{1}{\sqrt{3}})^5 = \frac{2\sqrt{3}}{27} \simeq \underline{0{,}13}$

3) Somme des n+1 premières puissances d'un réel q :
Soit q un nombre réel différent de 0 et de 1 :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :
On pose $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$
On écrit $(1 - q) x S_n = (1 - q) \times (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n)$
$= 1 \cancel{- q} \cancel{+ q} \cancel{- q^2} \cancel{+ q^2} \cancel{- q^3} \cancel{+ \ldots} \cancel{+ q^{n-1}} \cancel{- q^n} \cancel{+ q^n} - q^{n+1}$
$= 1 - q^{n+1}$
Donc : $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

4) Somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique :
On considère (u_n) suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Alors $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

De manière générale :

S_n = Premier terme x$\frac{1-raison^{nombredetermes}}{1-raison}$

Exemple d'application :
Calculer la somme suivante :
$S = 7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{9} + \frac{7}{27} + \ldots + \frac{7}{59049}$

On pose $u_0 = 7$, $u_1 = \frac{7}{3}$, $u_2 = \frac{7}{9}$, etc...

Chaque terme sauf le premier s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{1}{3}$

$u_0 = \frac{7}{3^0}$, $u_1 = \frac{7}{3^1}$, $u_2 = \frac{7}{3^2}$,etc...

D'où : (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

Il faut maintenant savoir quel est l'indice du dernier terme.

En fait $3^{10} = 59\,049$

Donc le dernier indice est 10 car l'exposant du 3 correspond à chaque fois à l'indice du terme.

Alors le nombre de termes est $10 - 0 + 1 = 11$

D'où :

$$\boxed{S = 7 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{21}{2} \times (1 - (\frac{1}{3})^{11} \simeq 10{,}5}$$