

Spé Maths Première (M Mangeard)	<u>Chapitre IV : Probabilités conditionnelles</u>	2020/2021
---------------------------------------	--	-----------

I) Rappels de Seconde sur les probabilités :

II) Probabilités conditionnelles :

1) Définition :

Soient A et B, deux événements, tels que $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, la probabilité

notée $P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

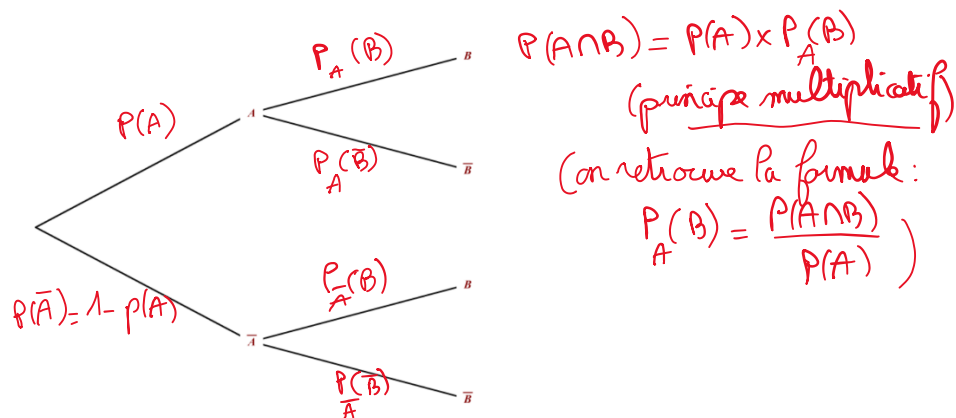
De même, si $P(B) \neq 0$, on peut définir la probabilité de l'événement A sachant que B est

réalisé notée : $P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

$P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont des probabilités dites conditionnelles.

2) Utilisation d'arbres pondérés :

a) Lien avec les formules précédentes :



Rappels des règles de calculs avec les arbres pondérés :

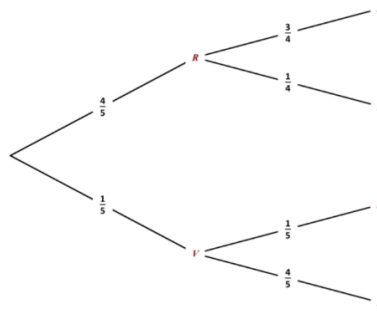
- La somme de toutes les probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1
- Pour calculer la probabilité sur un chemin, il suffit de multiplier les probabilités sur toutes les branches qui constituent le chemin.
- Si un événement correspond à plusieurs chemins, on calcule sa probabilité en ajoutant les probabilités de tous les chemins concernés.

b) Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :

On prélève un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et un vert. On suppose ces jetons indiscernables au toucher.

Si le jeton tiré est rouge, on prélève une boule dans une urne U_1 contenant : trois boules noires et une blanche. Sinon, on tire une boule dans une urne U_2 contenant une boule noire et quatre blanches.

Représentons la situation à l'aide d'un arbre :



La probabilité de tirer un jeton rouge est donnée par : $P(R) = \frac{4}{5}$

L'événement « Tirer un jeton rouge et obtenir une boule noire » est : $R \cap N$

$P(R \cap N) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ (Pour calculer la probabilité sur un chemin, il faut multiplier (=principe multiplicatif) les probabilités de chaque branche constituant le chemin)

$P_R(N) = \frac{3}{4}$ (c'est une probabilité conditionnelle). On a donc : **$P(R \cap N) = P(R) \times P_R(N)$**

3) Formule des probabilités totales :

En reprenant l'exemple précédent :

a) Définition :

$\{R; V\}$ est tel que $R \cup V = \Omega$ et $R \cap V = \emptyset$. On dit que :

$\{R; V\}$ est un système complet d'événements.

b) Les événements $R \cap N$ et $V \cap N$ sont incompatibles, donc :

$$P(N) = P(N \cap R) + P(N \cap V) \\ = \mathbf{P(R) \times P_R(N) + P(V) \times P_V(N) \text{ (Formule des probabilités totales)}}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{25}$$

4) Inversion du conditionnement :

On peut se demander ce que vaut $P_N(R)$.

Cette probabilité n'apparaît pas dans l'arbre précédent.

On revient à la définition :

$$P_N(R) = \frac{P(N \cap R)}{P(N)} = \frac{P(R) \times P_R(N)}{P(R) \times P_R(N) + P(V) \times P_V(N)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{15}{16}$$

III) Evénements indépendants :

1) Définition :

Soient A et B, deux événements, tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

On dit que A et B sont **des événements indépendants** si : **$P(A) = P_B(A)$**

La réalisation de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A.

De même, de manière symétrique, on a : **$P(B) = P_A(B)$**

2) Propriété 1 (Lien avec l'intersection) :

A et B sont **indépendants** $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Démonstration :

A et B indépendants, si $P(A) = P_B(A)$

Or, $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

Donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

3) Propriété 2 :

Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants (même chose pour A et $\bar{B}$ et pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$)

Démonstration :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, car $B \cup \bar{B} = \Omega$

Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont incompatibles, d'où :

$$P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\text{D'où : } P(A) = P(A) \times P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A) \times (1 - P(B)) = P(A \cap \bar{B})$$

$P(A) \times P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B})$, donc : **A et $\bar{B}$ sont indépendants**