I) Notion de suite numérique

1) Notion intuitive de suite :

On peut construire des suites quelconques de nombres, comme par exemple :
1,5,4,-3,28,9, etc...
Cependant, on ne peut effectuer aucun calcul car il n'y a pas de lien logique entre les termes de cette suite.

On peut par exemple considérer la suite suivante :
2,4,6,8,10,12,14, etc...
Chaque terme est un nombre pair et on passe de l'un au suivant en ajoutant 2.
Contrairement au premier exemple, il y a bien un lien logique entre les différents termes de cette suite.
Chaque terme pourra être nommé en fonction de l'ordre qu'il occupe dans la suite :
- le premier terme est : 2 . On pourra l'appeler : u_1
- le deuxième terme est : 4. On pourra l'appeler : u_2

Et ainsi de suite.... le septième terme $u_7 = 14$,etc...

Exemple classique : la suite de Fibonacci

Fibonacci (Léonard de Pise ,1175-1250) a étudié le problème suivant :
« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »
On fait l'hypothèse que les lapins de meurent pas...

Si on construit une suite donnant le nombre total de couples de lapins obtenus à chaque mois, au premier et au deuxième mois, il n'y a qu'un seul couple, et au début du troisième mois, il y a deux couples de lapins, puis au quatrième mois, trois couples de lapins, etc...
A chaque mois, à partir du troisième, le nombre de couples de lapins est égal à la somme des couples de lapins des deux mois précédents.
Ce que l'on peut noter de la sorte :
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144
On verra plus loin dans ce chapitre que cette suite présente une curiosité quand on regarde les quotients successifs de termes consécutifs...

2) Définition :

Une suite numérique est une fonction définie sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n) \text{ que l'on note } u_n$$

Notation : La suite u se note $(u_n)_{n\geq 0}$ (ce qui se lit : « suite de terme général u indice n pour n positif ou nul »)

Exemples :
a) Considérons la suite u définie par son terme général : $u_n = 2n$
Pour n = 0, $u_0 = 2x0 = 0$
Pour n = 1, $u_1 = 2x1 = 2$
On peut calculer pour n = 152, $u_{152} = 2x152 = 304$

Remarques importantes : - si u commence à u_0, alors u_{152} est le 153^{ième} terme !
- Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang.

b) Reprenons notre exemple précédent concernant la suite de Fibonacci :
Si on note $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$, le troisième terme $u_3 = u_1 + u_2 = 1+1 = 2$

De manière générale, u_1 et u_2 étant donnés , $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Remarque :
Le calcul d'un terme nécessite la connaissance des deux qui le précédent.

II) Modes de génération d'une suite

Deux manières de « fabriquer » des suites numériques :

1) Suites du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction :
On dit que ces suites sont définies par une formule explicite en fonction de n.
Il suffit de remplacer n par la valeur cherchée.

Exemple :
On considère la suite u définie par la formule donnant son terme général :
$u_n = \sqrt{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
$u_{25} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$, $u_{100} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101}$

On peut calculer u_n pour n entier naturel quelconque.

2) Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction :
On dit que u est définie par récurrence.

Il faut donner le premier terme, et ensuite, chaque terme se calcule à partir du précédent en appliquant la fonction f.

Exemple :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$u_1 = \frac{3}{4} \times u_0 - 1 = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$

Remarque importante :
Lorsqu'une suite est définie par récurrence, le calcul d'un terme nécessite la connaissance des termes qui précédent.
(Pour calculer u_4, il faut calculer u_3 qui nécessite u_2, lequel demande u_1, etc …).

C'est pourquoi on essaiera, quand c'est possible, de déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.

III) Utilisation des outils logiciels et de la calculatrice pour programmer des suites

1) A l'aide d'un tableur : (OpenOffice Calc)

Exemple :
On souhaite programmer la suite de Fibonacci vue précédemment. On veut calculer le 30$^{\text{ième}}$ terme :
- Dans la cellule A1, on tape 1 (c'est le premier terme de la suite : u_1)
- Dans la cellule A2, on tape 1 également ($u_2=1$)
- A partir du troisième terme, on obtient chaque terme en ajoutant les deux précédents. On tape dans la cellule A3 =A1+A2
- Ensuite, on tire la molette en bas à droite de la cellule jusqu'à la ligne 30 pour obtenir u_{30}

Voici ce que l'on obtient :

A3 =A1+A2

	A	B	C
1	1		
2	1		
3	2		
4	3		
5	5		
6	8		
7	13		
8	21		
9	34		
10	55		
11	89		
12	144		
13	233		
14	377		
15	610		
16	987		
17	1597		
18	2584		
19	4181		
20	6765		
21	10946		
22	17711		
23	28657		
24	46368		
25	75025		
26	121393		
27	196418		
28	317811		
29	514229		
30	832040		

Donc u_{30} = 832 040

2) Avec Algobox :

Exemple1 : Calcul d'un terme d'une suite définie explicitement en fonction de n

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + n + 1$

On demande à l'utilisateur l'indice du terme souhaité, on effectue le calcul et on fait afficher le résultat.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Indice du terme à calculer :"
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR pow(n,2)+n +1
  AFFICHER "Le terme de rang "
  AFFICHER n
  AFFICHER "est :"
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

On souhaite calculer u_{500} . Voici l'affichage obtenu :

```
***Algorithme lancé***
Indice du terme à calculer :
Entrer n : 500
Le terme de rang 500est :
250501

***Algorithme terminé***
```

Exemple2 : Calcul d'un terme d'une suite définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1}=f(u_n)$:

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

On demande à l'utilisateur l'indice souhaité, on calcule le terme puis on affiche le résultat.

```
▼ VARIABLES
  ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├u EST_DU_TYPE NOMBRE
  └i EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├AFFICHER "Indice du terme à calculer :"
  ├LIRE n
  ├u PREND_LA_VALEUR 2
  ▼ POUR i ALLANT_DE 1 A n
    ├DEBUT_POUR
    ├u PREND_LA_VALEUR sqrt(1+u)
    └FIN_POUR
  ├AFFICHER "Le terme de rang "
  ├AFFICHER n
  ├AFFICHER "est :"
  └AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

Calcul de u_{15} :

```
***Algorithme lancé***
Indice du terme à calculer :
Entrer n : 15
Le terme de rang 15est :
1.618034

***Algorithme terminé***
```

3) <u>Utilisation de la calculatrice : (Casio graph35+)</u>
<u>(voir vidéo sur https://www.youtube.com/watch?v=QFi7yDA7LWA&feature=youtu.be)</u>

- Dans le menu principal, choisir RECUR
- Dans les icônes du bas, choisir TYPE et sélectionner F1 pour une suite définie explicitement en fonction de n ou F2 pour une suite définie par récurrence. *(F3 permet d'écrire des suites à récurrence linéaire comme la suite de Fibonacci par exemple, c'est-à-dire on donne les deux premiers termes et on calcule les suivants par une formule nécessitant la connaissance de ces deux termes)*

On peut obtenir un tableau de valeurs en paramétrant via SET l'indice de début (start) et celui de fin (end)

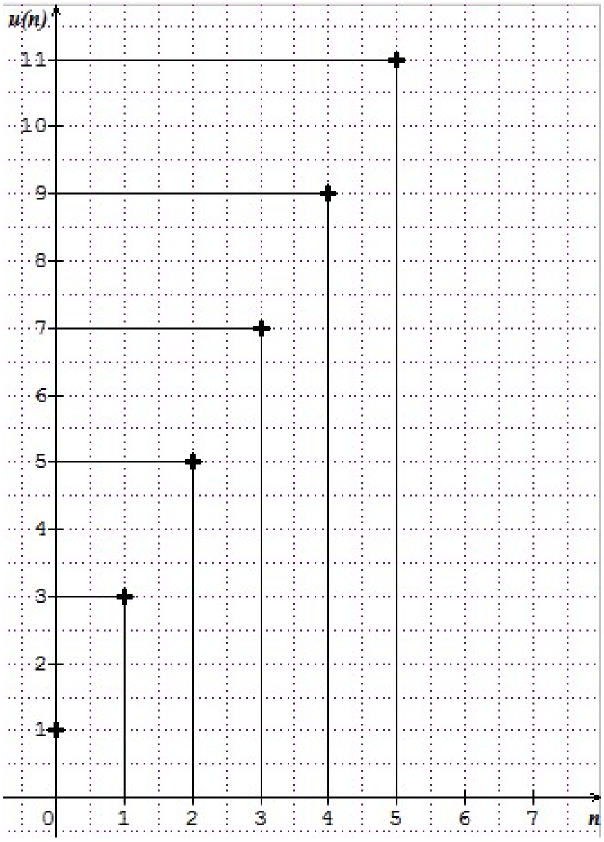
4) <u>Utilisation de Python :</u>

IV) Représentation graphique :

1) <u>Suites définies explicitement en fonction de n :</u>

Deux représentations sont possibles : soit en plaçant les termes sur une droite graduée, soit en plaçant dans le plan les points M_n de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$

<u>Exemple :</u> représentation de la suite u définie par son terme général $u_n = 2n + 1$ (suite des entiers impairs) pour n allant de 0 à 5 :



Remarque : il ne faut surtout pas relier les ponts car n ne prend que des valeurs entières.

2) Suites définies par récurrence :

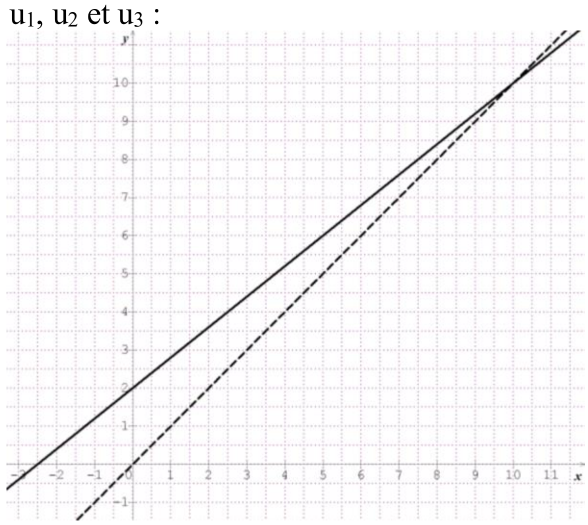
On considère une suite définie par récurrence. $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.
On souhaite représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

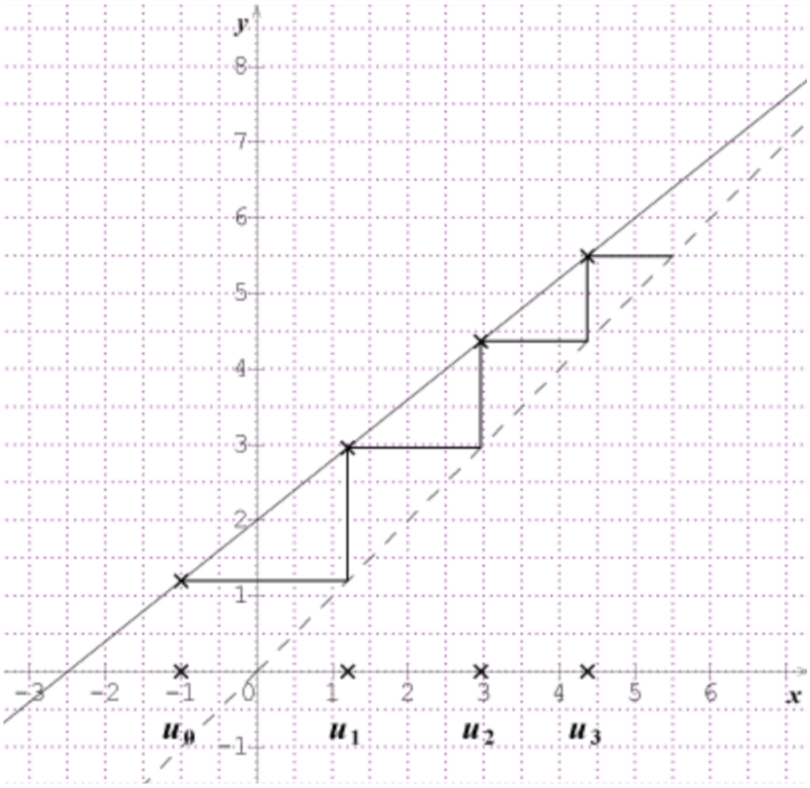
Méthode :
- On trace dans un repère du plan la courbe représentative de la fonction f
- Dans le même repère, on trace la première bissectrice (=la droite d'équation y = x)
- On place le premier terme (souvent u_0) sur l'axe des abscisses
- Comme $u_1 = f(u_0)$, l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse u_0 est u_1
- On utilise la première bissectrice pour placer u_1 sur l'axe des abscisses
- On continue pour u_2, etc…

Exemple :

(u_n) suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

On souhaite représenter u_0, u_1, u_2 et u_3 :





V) Variations des suites :

1) Définitions :
   Soit (u_n) une suite numérique.

- Si à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, alors on dit que (u_n) est **une suite croissante** à partir du rang n_0

- Si à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, alors on dit que (u_n) est **une suite décroissante** à partir du rang n_0

- Si à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, alors on dit que (u_n) est **une suite constante** à partir du rang n_0

Remarques sur le comportement d'une suite à l'infini :