Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé de l'évaluation de mathématiques : SUJET A** Nombres dérivés et taux d'accroissement/Détermination graphique de nombres dérivés/Equations de tangentes/Formules de dérivation	Fait le mardi 09/03/2021

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

1) Déterminer f '(-1) à l'aide d'un taux d'accroissement *(Méthode 1)*

Soit $h \neq 0$:

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{3(h-1)^2-5(h-1)+4-(3\times(-1)^2-5\times(-1)+4)}{h}$$

$$= \frac{3(h^2-2h+1)-5h+5+4-12}{h}$$

$$= \frac{3h^2-6h+\cancel{3}-5h-\cancel{3}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(3h-11)}{\cancel{h}} = 3h-11$$

Or, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} 3h-11 = -11 < +\infty$, d'où f est dérivable en -1 et :

$$f'(-1) = -11$$

2) Déterminer f '(-1) à l'aide des formules de dérivation. *(Méthode 2)*

f est dérivable sur ℝ, car c'est une fonction polynôme

$$f'(x) = 3\times 2x - 5 = 6x - 5$$

d'où : $f'(-1) = 6\times(-1) - 5 = -6-5 = -11$

3) En déduire l'équation réduite de (T_{-1}), droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1

(T_{-1}) a pour équation réduite : $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$

or, $f'(-1) = -11$ (questions 1 et 2) et $f(-1) = 12$

D'où : $y = -11(x+1)+12$

$\iff y = -11x - 11 + 12$

$\iff y = -11x + 1$ (Equation réduite de (T_{-1}))

Exercice 2 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois le plus grand domaine sur lequel la fonction est dérivable.

1) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 8$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

$f'(x) = 3 \times 4x^3 - 6 \times 2x = 12x^3 - 12x$

2) $g(x) = 2\sqrt{x}(x^3 + 1)$

$x \longmapsto 2\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+} =]0;+\infty[$

$x \longmapsto x^3 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

Par produit, g est dérivable sur $]0;+\infty[$

On pose : $u(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad v(x) = x^3 + 1$

$u'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad v'(x) = 3x^2$

Or, $(uv)' = u'v + uv'$

Donc : $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(x^3 + 1) + 2\sqrt{x} \times 3x^2$

$= \frac{x^3 + 1 + 6x^2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^3 + 1 + 6x^3}{\sqrt{x}} = \frac{7x^3 + 1}{\sqrt{x}}$

3) $h(x) = \sqrt{7x + 2}$

h est définie $\Leftrightarrow 7x + 2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{2}{7}$

Soit $u(x) = 7x + 2$

h est dérivable $\Leftrightarrow u(x) > 0$

D'où h est dérivable sur $]-\frac{2}{7};+\infty[$

$h(x) = f(u(x))$ où $f(x) = \sqrt{x}$, avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = (f[u(x)])' = [f(7x+2)]' = 7 \times f'(7x+2)$

(car $[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$)

Donc : $h'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{7x+2}} = \frac{7}{2\sqrt{7x+2}}$

4) $i(x) = \frac{4x-1}{x-5}$

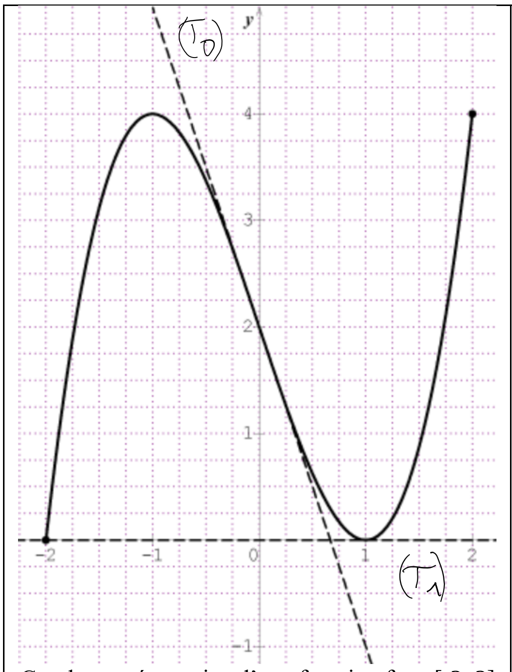
i est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ (car un quotient est dérivable partout où il est défini)

On pose $u(x) = 4x - 1$ $\quad v(x) = x - 5$

$u'(x) = 4$ $\quad v'(x) = 1$

Or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, d'où $i'(x) = \frac{4(x-5) - (4x-1)}{(x-5)^2} = \frac{-20+1}{(x-5)^2} = \frac{-19}{(x-5)^2}$

Exercice 3 : (Sur le sujet)



Courbe représentative d'une fonction f sur [-2 ;2]

1) Par lecture graphique, déterminer :

f(0) = 2 f(-1) = 4 f(2) = 4

2) Déterminer les équations réduites respectives de (T_0) et (T_1) , tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 1 en justifiant :

(T_1) : tangente horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $x = 1$
: c'est l'axe des abscisses.
Donc : (T_1) a pour équation réduite
$y = 0$

(T_0) :
$f(0) = 2$, $f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{+1} = -3$

d'où (T_0) : $y = -3(x-0)+2$

$\Leftrightarrow y = -3x+2$ (Equation réduite de (T_0))