Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du DM de mathématiques :** *Variables aléatoires / Variations des fonctions*	Rendu le mardi 25 mai 2021

Exercice 1 :

Soit f(x) = $\frac{7x}{x^2+5}$

1) Montrer que f est dérivable sur ℝ et f '(x) = $\frac{7(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{(x^2+5)^2}$

$x^2+5 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est définie sur ℝ.

f est dérivable sur ℝ car un quotient est dérivable partout où il est défini

On pose $u(x) = 7x$ et $v(x) = x^2+5$

$u'(x) = 7$, et $v'(x) = 2x$

Or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D'où : $f'(x) = \frac{7(x^2+5) - 7x \times 2x}{(x^2+5)^2}$

$= \frac{7x^2+35-14x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{-7x^2+35}{(x^2+5)^2} = \frac{7(5-x^2)}{(x^2+5)^2}$

$= \frac{7(\sqrt{5}^2 - x^2)}{(x^2+5)^2}$

d'où $f'(x) = \frac{7(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{(x^2+5)^2}$

2) Etudier le signe de f '

$(x^2+5)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{5} - x \geq 0 \iff x \leq \sqrt{5}$

$\sqrt{5} + x \geq 0 \iff x \geq -\sqrt{5}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de $\sqrt{5}-x$		+		+	0	−	
Signe de $\sqrt{5}+x$		−	0	+		+	
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	

3) En déduire les variations de f sur ℝ (dresser son tableau de variation)

D'après la question 2), $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$

$f'(x) < 0 \iff x \in]-\infty ; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5} ; +\infty[$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-\frac{7\sqrt{5}}{10} \simeq -1{,}57$	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{5}}{10} \simeq 1{,}57$	$\searrow$	

$f(-\sqrt{5}) = \frac{-7\sqrt{5}}{(-\sqrt{5})^2+5} = \frac{-7\sqrt{5}}{10}$

$f(\sqrt{5}) = \frac{7\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2+5} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$

4) En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

or, $f'(0) = \frac{7 \times \cancel{5}}{5^{\cancel{2}}} = \frac{7}{5}$ et $f(0) = 0$

Donc : $T_0 : y = \frac{7}{5}x$

<u>Exercice 2 :</u>

On considère un jeu consistant à choisir un jeton dans une boîte qui en contient cinquante, indiscernables au toucher.

En fait, dans la boîte, il y a : cinq jetons verts, dix jetons jaunes et les autres sont rouges.

Pour jouer, on doit miser deux euros.

- Si on tire un jeton rouge, on perd dix euros
- Si on tire un jeton jaune, on gagne dix euros
- Sinon, on gagne trente euros.

On note X, la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur (en tenant compte de la mise)

1) Déterminer la loi de probabilité de X

Valeurs prises par X : $X = \{-12 ; 8 ; 28\}$

Loi de probabilité :

x_i	-12	8	28
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$P(X=-12) = \frac{35}{50} = \frac{7 \times \cancel{5}}{10 \times \cancel{5}} = \frac{7}{10}$

$P(X=8) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

$P(X=28) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

2) Calculer E(X). Que peut-on en déduire ? Justifier.

$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots$

$= \frac{7}{10} \times (-12) + \frac{1}{5} \times 8 + \frac{1}{10} \times 28$

donc $E(X) = -4 < 0$: le jeu est donc défavorable au joueur