

Spé Maths Première (M Mangeard)	<u>Applications de la dérivation</u>	Mars 2020
---------------------------------------	---	-----------

1) Dérivation et variations :

a) Activité de découverte :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

- 1) Etudier les variations de f
- 2) Calculer f'
- 3) Etudier le signe de f'
- 4) Mettre en parallèle le tableau de variation de f et le tableau de signe de f' . Que constate-t-on ?

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ (trinôme du second degré) avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 7$

- Comme $a > 0$, la parabole représentant f est orientée vers le haut, autrement dit, f est d'abord décroissante puis ensuite croissante.

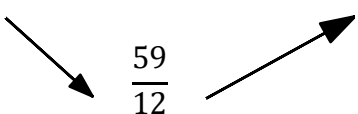
- Soit $S(\alpha; \beta)$ le sommet de la parabole :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\frac{5}{6} + 7$$

$$= \frac{25}{12} - \frac{25}{6} + \frac{84}{12}$$

$$= \frac{59}{12}$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
Variations de f			

2) f étant un trinôme du second degré, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x - 5$$

3) Signe de f' :

$$6x - 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+

4) Si on met en parallèle le tableau de variation de f avec le tableau de signes de f'

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
Variations de f		$\frac{59}{12}$	

Il semble y avoir un lien direct entre ces deux tableaux : quand f' est négative, alors f est décroissante, quand f' est positive, alors f est croissante.

b) Propriété :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

- Si f' est négative sur $J \subset I$, alors f est décroissante sur J (f' peut s'annuler en quelques points de J)
- Si f' est positive sur $J \subset I$, alors f est croissante sur J (f' peut s'annuler en quelques points de J)
- Si $f' = 0$ sur $J \subset I$, alors f est constante sur J

Exemple :

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

On va étudier le signe de f' :

$$6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $6x$		-	+	
Signe de $x - 1$		-	+	
Signe de f'		+	-	+

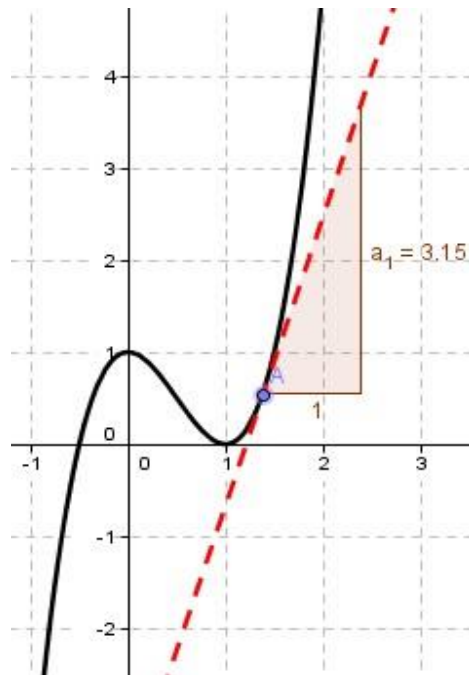
En fait, on va regrouper le signe de f' et les variations de f dans le même tableau :

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
<i>Signe de $f'(x)$</i>	$+$	0	$-$	0	$+$	
<i>Variations de f</i>		$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

2) Notion d'extremum local :

Activité Geogebra de découverte :



Sur $] -1 ; 1[$, f admet **un maximum local** qui vaut 1 et sur $]0;2[$, f admet **un minimum local** qui vaut 0.

La notion d'extremum local implique de cantonner l'étude à un intervalle ouvert n'étant pas obligatoirement égal au domaine de définition complet.

La fonction représentée est définie sur $\mathbb{R}$.

1 n'est pas un maximum de f sur tout $\mathbb{R}$. C'est la même chose pour 0 : minimum de f .

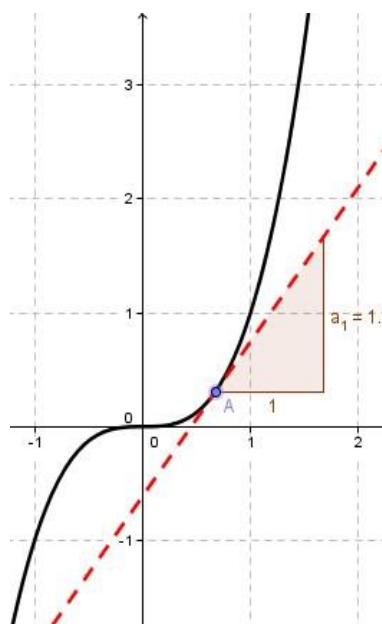
Dans l'activité précédente, on voit que pour $x < 1$, $f'(x) > 0$ puis pour $x > 1$, $f'(x) < 0$ avec $f(1) = 0$

La fonction f admet **un extremum local** en a si et seulement si : **$f'(a) = 0$ et f change de signe en a**

Remarque : ATTENTION les deux conditions doivent être vérifiées.

Exemple : Soit f la fonction cube en $x = 0$

$f(x) = x^3$ d'où $f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$ mais f ne change pas de signe en 0



La fonction cube n'admet pas d'extremum local en 0

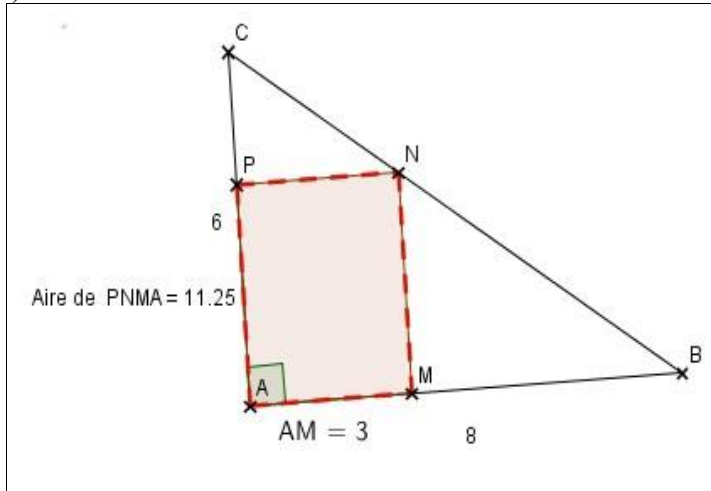
3) Optimisation :

Dans certaines situations, on est amené à déterminer les éventuels extremas d'une fonction pour minimiser ou, dans d'autres cas, pour maximiser une certaine quantité :

- Chercher un coût minimum
- Chercher une aire maximale
- Optimiser des volumes
- Déterminer la distance d'un point à une courbe, etc...

Exemples :

a) Aire maximale :



ABC est un triangle rectangle en A tel que
AB = 8 cm et AC = 6 cm.

M est un point mobile du segment [AB].

On pose $x = AM$

On trace le rectangle AMNP.

Question : Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle AMNP est maximale ?

Pour conjecturer la valeur de x , cliquer sur le lien suivant :

http://mangeard.maths.free.fr/Ecole/JeanXXIII/PremiereS/optimisation_aire001.html

Exprimons MN en fonction de x :

Dans le triangle ABC, (MN) // (AC), appliquons le théorème de Thalès :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC} \text{ d'où : } \frac{8-x}{8} = \frac{MN}{6}$$

$$\text{Alors } MN = \frac{6(8-x)}{8} = \frac{3(8-x)}{4}$$

$$\text{Or, Aire(AMNP)} = AM \times MN = \frac{3(8-x)}{4} \times x = \frac{-3x^2 + 24x}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$$

$$\text{On pose } f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.

$$\text{On a } f'(x) = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 4$$

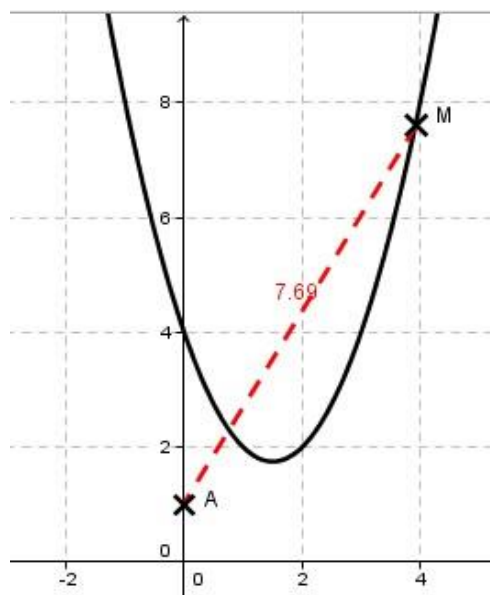
En $x = 4$, f' s'annule et change de signe. Donc, f admet en 4 un extremum local (ici un maximum)

Par conséquent :

L'aire du rectangle AMNP est maximale et vaut 12 (= $f(4)$) cm^2 pour $x = 4 \text{ cm}$

b) Distance d'un point à une parabole :

On a tracé la parabole représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ dans un repère orthonormé du plan.



Le point A de coordonnées (0;1) est fixe.

M est un point mobile sur la parabole.

Question : déterminer les coordonnées de M qui minimisent la distance AM.

Exprimons AM en fonction de x :

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } y &= x^2 - 3x + 4 \text{ d'où : } (y - 1)^2 = (x^2 - 3x + 3)^2 = (x^2 - (3x - 3))^2 \\ &= x^4 - 2x^2(3x - 3) + (3x - 3)^2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x^2 - 18x + 9 \\ &= x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } x^2 + (y - 1)^2 = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9 = AM^2$$

$$\text{Posons } f(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$$

f est un polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18$$

1 est racine évidente de ce polynôme. En effet, $4 \times 1^3 - 18 \times 1^2 + 32 \times 1 - 18 = 0$

$$\text{D'où : } 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Pour déterminer les coefficients a , b et c , on développe le membre de droite et on identifie à celui de gauche :

$$\begin{aligned} (x - 1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + x^2(b - a) + x(c - b) - c \end{aligned}$$

D'où en identifiant les coefficients de même degré :

$$a = 4$$

$$b - a = -18 \quad \text{Alors : } a = 4, b = -14 \text{ et } c = 18$$

$$c - b = 32$$

$$-c = -18$$

$$\text{Donc : } f'(x) = (x - 1)(4x^2 - 14x + 18)$$

$$\text{Or, pour } 4x^2 - 14x + 18, \text{ on a : } \Delta = 14^2 - 4 \times 4 \times 18 = -92 < 0$$

Donc le trinôme est strictement positif.

$$f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x - 1 = 0$$

$$\text{si et seulement si } x = 1$$

Les coordonnées de M qui minimisent AM sont donc : (1;f(1)) c'est-à-dire **(1;2)** et cette distance minimum est de $\sqrt{1 - 6 + 16 - 18 + 9} = \sqrt{2}$