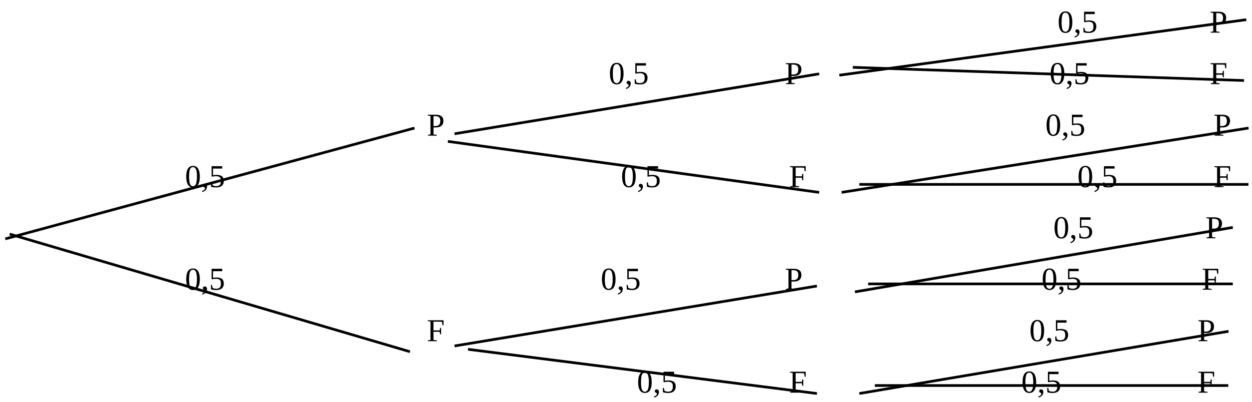
Spé Maths Première (M Mangeard)	**Probabilités (2) : Variables aléatoires**	Année scolaire 2019/2020

I) Variables aléatoires

Exemple d'une expérience aléatoire :
On lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée (= situation d'équiprobabilité).
- Chaque sortie de PILE fait gagner trois points.
- Chaque sortie de FACE fait perdre deux points.

On va compter les points obtenus à l'issue des trois lancers.

Modélisation à l'aide d'un arbre pondéré :



- Chaque chemin est constitué de trois branches
- Chaque chemin correspond à une issue après les trois lancers. Exemple : (Pile,Pile,Pile) est une issue possible (elle correspond au premier chemin de l'arbre)
- Pour obtenir la probabilité d'une issue correspondant à un chemin, il suffit de multiplier les probabilités de chaque branche qui constitue le chemin. *(principe multiplicatif)*
- Si plusieurs chemins constituent un événement, la probabilité de cet événement est égale à la somme des probabilités de chaque chemin.

On a $\Omega = \{(P;P;P), (P;P;F), (P;F;P), (P;F;F), (F;P;P), (F;P;F), (F;F;P), (F;F;F)\}$
Gains possibles pour chaque issue = $\{9 ; 4 ; -1 ; -6\}$
On ne peut pas avoir d'autres gains.
On va poser :
$X : \Omega \rightarrow \{9 ; 4 ; -1 ; -6\}$

X est une fonction définie sur l'ensemble Ω de toutes les issues possibles et les valeurs qu'elle prend correspondent aux gains possibles.

Définition :
La fonction X ainsi défine est appelée **variable aléatoire réelle**.
Si on note $x_1 = 9$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$ et $x_4 = -6$

L'événement « $X = x_1$ » se notera $(X = x_1)$

La probabilité de cet événement pourra se noter : $P(X = x_1)$
Donner la loi de probabilité de X consiste à écrire un tableau à deux lignes :
- Première ligne : les valeurs x_i prises par X
- Deuxième ligne : les probabilités correspondantes.

Dans notre exemple :

$X = x_i$	9	4	-1	-6
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(X = 9) = \frac{1}{8}$ $P(X = 4) = \frac{3}{8}$ $P(X = -1) = \frac{3}{8}$ $P(X = -6) = \frac{1}{8}$

Remarque : $P(X = 9) + P(X = 4) + P(X = -1) + P(X = -6) = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8} = 1$

De manière générale, la somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1.

III) Espérance, variance et écart-type :

1) Espérance :

On souhaite connaître la moyenne des gains que l'on peut espérer atteindre.
Pour cela, on va calculer l'**espérance mathématique** de la variable aléatoire.

Définition :

On considère une variable aléatoire réelle X. n est un entier naturel non-nul.
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sont les différentes valeurs prises par X et $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ les probabilités correspondantes.

$X : \Omega \to \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

Alors, l'espérance mathématique de X, notée E(X) est définie par :

$$\boxed{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_n x_n}$$

Remarque : notation Σ

Certaines sommes peuvent s'écrire de manière plus condensée grâce à la notation « sigma » :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$$

$$\boxed{\text{D'où : } E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i}$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent : $E(X) = 9\times\frac{1}{8} + 4\times\frac{3}{8} + (-1)\times\frac{3}{8} + (-6)\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui compte le gain algébrique d'un jeu, alors si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est **équitable**, si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable au joueur** et si $E(X) > 0$, il est **favorable au joueur** (et donc défavorable à l'organisateur)

2) Variance :

Pour étudier la dispersion des valeurs prises par X autour de l'espérance, on va définir la variance de X.

Définition :

On considère une variable aléatoire réelle X. n est un entier naturel non-nul.
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sont les différentes valeurs prises par X et $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ les probabilités correspondantes.

$X : \Omega \to \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

On note E(X) l'espérance mathématique de X, alors :
La variance de X notée V(X) est donnée par :

$$\boxed{V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2}$$

Avec la notation Σ :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2}$$

Dans le cas précédent :

$$V(X) = \frac{1}{8}\times(9 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}\times(4 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}\times(-1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{8}\times(-6 - \frac{3}{2})^2$$
$$= \frac{75}{4}$$

Autre formule donnant V(X) :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i\right)^2$$

Démonstration : se démontre en développant l'expression donnant V(X)

2) Ecart-type :

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Notation : σ

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Dans notre exemple : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) <u>Calcul de E(aX + b) et V(aX) :</u>

Soient a et b, deux nombres réels, X, une variable aléatoire réelle.
aX+b est une variable aléatoire et

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X) + b}$$

<u>Démonstration :</u>

x_1, x_2, x_3, …, x_n sont les différentes valeurs prises par X et p_1, p_2, p_3,...p_n les probabilités correspondantes.

Par définition, $E(aX+b) = p_1(a\,x_1 + b) + p_2(a\,x_2 + b) + ... + p_n(a\,x_n + b)$

$= a(p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + ... + p_n\,x_n) + b(p_1 + p_2 + ... + p_n)$

Or, $p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + ... + p_n\,x_n = E(X)$ et $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Donc : **<u>E(aX+b) = aE(X) + b</u>**

On va calculer V(aX) en fonction de V(X) :

$$\boxed{V(aX) = a^2V(X)}$$

<u>Démonstration :</u>

$V(aX) = p_1(a\,x_1 - E(aX))^2 + p_2(a\,x_2 - E(aX))^2 + \dots + p_n(a\,x_n - E(aX))^2$

$= p_1(a^2x_1^2 - 2a\,x_1E(aX) + (E(aX))^2) + p_2(a^2x_2^2 - 2a\,x_2E(aX) + (E(aX))^2)$

$+ \dots \dots + p_n(a^2x_n^2 - 2a\,x_nE(aX) + (E(aX))^2)$

$= a^2(p_1\,x_1^2 + p_2\,x_2^2 + \dots + p_n\,x_n^2) - 2aE(aX)(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) + (E(aX))^2(p_1 + p_2 + ... + p_n)$

$= a^2(p_1\,x_1^2 + p_2\,x_2^2 + \dots + p_n\,x_n^2) - 2a^2E(X)xE(X) + a^2(E(X))^2$ (car $E(aX) = aE(X)$)

$= a^2(p_1\,x_1^2 + p_2\,x_2^2 + \dots + p_n\,x_n^2) - 2a^2(E(X))^2 + a^2(E(X))^2$

$= a^2(p_1\,x_1^2 + p_2\,x_2^2 + \dots + p_n\,x_n^2) - a^2(E(X))^2$

$= a^2(E(X^2) - (E(X))^2) = \underline{a^2V(X)}$