

Spé Maths Première (M Mangeard)	<u>Produit scalaire et applications</u>	Année scolaire 2019/2020
---------------------------------------	--	-----------------------------

I) Produit scalaire et orthogonalité :

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Définition analytique du produit scalaire :

Soient $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{u}'$ **le réel** noté : $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \dots\dots\dots$$

Exemples :

a) Soient $\vec{u}(3 ; 6)$ et $\vec{v}(-5 ; 7)$

Alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

b) Soient $\vec{u}(2 ; -1)$ et $\vec{v} = \vec{0}$

On sait que $\vec{v}(0;0)$ d'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Autrement dit : Si on calcule le produit scalaire d'un vecteur avec le vecteur nul, alors ce produit scalaire est égal à 0

c) Soit $\vec{u}(x,y)$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$

On note ce nombre $\vec{u}^2$: on l'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$

2) Propriétés :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) Identités remarquables :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstrations :

Soient $\vec{u}(x ; y)$, $\vec{v}(x' ; y')$ et $\vec{w}(x'' ; y'')$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = x'x + y'y = xx' + yy' = \vec{u} \cdot \vec{v}$

b)

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{v} + \vec{w}(x' + x'' ; y' + y'') \text{ d'où : } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') \\ &= xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

$$d) (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\text{Or, } \vec{u} + \vec{v} (x + x' ; y + y')$$

$$\text{D'où : } (\vec{u} + \vec{v})^2 \text{ a pour coordonnées } (x + x')^2 ; (y + y')^2$$

$$\text{C'est-à-dire : } (x^2 + 2xx' + x'^2 ; y^2 + 2yy' + y'^2) = (x^2 ; y^2) + 2(xx' + yy') + (x'^2 ; y'^2)$$

$$\text{Or, } \vec{u}^2 (x^2 ; y^2) \text{ et } \vec{v}^2 (x'^2 ; y'^2) \text{ et } 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(xx' + yy')$$

$$\text{Donc : } (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

On montre de même les deux autres identités.

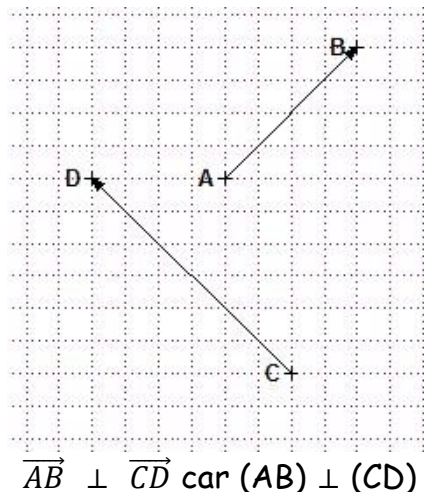
3) Vecteurs orthogonaux :

a) Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** soit si, soit si

Notation : $\vec{u} \perp \vec{v}$

Exemple :



$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \text{ car } (AB) \perp (CD)$$

b) Propriété :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$$

Exemple :

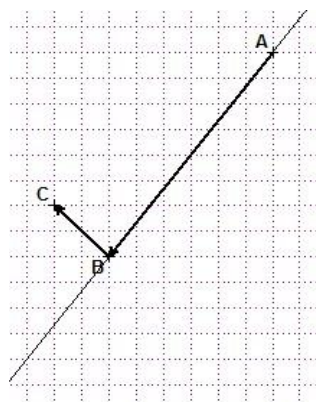
Avec les points A, B, C et D représentés précédemment, en prenant un petit carreau comme unité sur les deux axes de notre repère, on a $\overrightarrow{AB}$ (.....) et $\overrightarrow{CD}$ (.....)

D'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

4) Application1 : Equation de droite

a) Définition d'un vecteur normal à une droite :

C'est un vecteur non-nul, orthogonal à tout vecteur directeur de la droite.



$\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à la droite (AB)

b) Coordonnées d'un vecteur normal :

Si une droite (d) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$
(avec $(a,b) \neq (0,0)$),
alors $\vec{n}$est un vecteur normal à la droite (d).

Démonstration :

On sait que $\vec{u}(-b ; a)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$$\text{Or, } \vec{n} \cdot \vec{u} = ax(-b) + bxa = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$$

$\vec{n}$ est donc bien un vecteur normal à la droite (d)

Exemple d'application :

Soit (d) : $3x + 2y - 4 = 0$ et $A(-3;1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') telle que $(d') \perp (d)$ et $A \in (d')$.

Solution :

5) Application 2 : Equation d'un cercle

a) Rappel :

Soit I un point du plan. R , un réel strictement positif, alors :

Le cercle de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que :

.....

b) Equation cartésienne d'un cercle :

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Soit $I(a ; b)$ et $R > 0$

M appartient au cercle de centre I et de rayon R $\Leftrightarrow$

On dit que l'égalité est une équation cartésienne du cercle

Démonstration :

M appartient au cercle de centre I et de rayon R $\Leftrightarrow IM = R$

Or, si on pose $M(x ; y)$, $IM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

D'où : $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ c'est-à-dire :

Exemples :

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $K(-3 ; 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Solution :

2) Parfois, on donne une équation cartésienne développée d'un cercle et on demande

de retrouver ses éléments caractéristiques.

On considère l'ensemble (E) suivant :

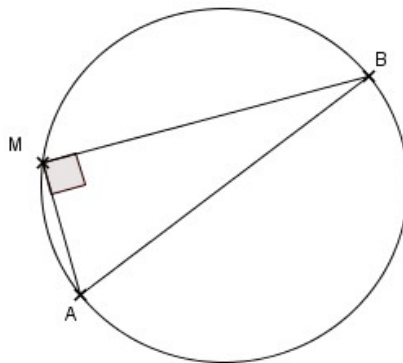
$$(E) = \{ M(x; y) \text{ du plan tel que : } x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0 \}$$

L'objectif est d'écrire l'égalité précédente sous la forme : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

c) Propriété caractéristique :

Rappel de collège :

Soient A et B deux points distincts.
M appartient au cercle de diamètre [AB] (avec $M \neq A$ et $M \neq B$) si et seulement si
MAB est un triangle rectangle en M.



Propriété :

M appartient au cercle de diamètre [AB] $\Leftrightarrow$

Exemple :

Soient F(2;5) et G(-1;4).

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [FG].

Solution :

II) Norme d'un vecteur :

1) Définition de la norme d'un vecteur :

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Soient M et N, deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$

La norme de $\vec{u}$ est le réel positif MN.

Notation : norme de $\vec{u}$: $||\vec{u}||$

Cas particulier : $||\vec{0}|| = 0$

2) Propriétés :

a) Dans un repère orthonormé du plan, si $\vec{u}(x ; y)$ alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Lien avec le carré scalaire :

$$||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$$

c) Inégalité triangulaire :

Soient u et v deux vecteurs :

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u}$ un vecteur :

$$||\lambda \vec{u}|| = |\lambda| ||\vec{u}||$$

Démonstration des propriétés :

a) Soit $\vec{u}(x ; y)$: il existe un point M(x ; y) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$
Par définition, $||\vec{u}|| = OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Déjà démontrée

c) Admise

d) Soit $\vec{u}(x ; y)$, alors $\lambda \vec{u}(\lambda x ; \lambda y)$

D'où : $||\lambda \vec{u}|| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| ||\vec{u}||$

3) Lien produit scalaire - norme :

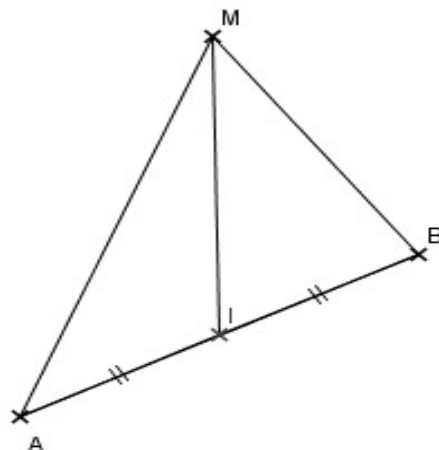
a) Soient u et v deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} ||\vec{u} + \vec{v}||^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= ||\vec{u}||^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 \\ \text{D'où : } ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 &= 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \text{Donc : } \frac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) &= \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

b) Application : théorème de la médiane



I étant le milieu de [AB], on a l'égalité suivante :

$$MA^2 + MB^2 = \dots\dots\dots$$

Démonstration :

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \overrightarrow{MI}^2 + 2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2$$

$$= MI^2 + 2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2$$

$$\text{De même : } MB^2 = MI^2 + 2 \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2$$

$$\text{D'où : } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ d'où : } 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 0$$

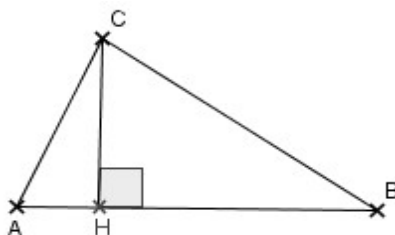
$$\text{et } IA = IB = \frac{AB}{2}, \text{ d'où } IA^2 + IB^2 = 2 \frac{AB^2}{4} = \frac{AB^2}{2}$$

Par conséquent :

$$MA^2 + MB^2 = \dots\dots\dots$$

II) Différentes expressions du produit scalaire :

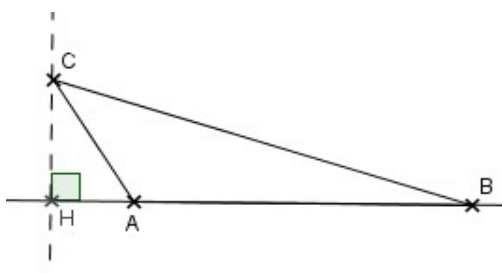
1) Avec les projetés orthogonaux :



H est le projeté orthogonal de C sur (AB) (c'est-à-dire : $(CH) \perp (AB)$ avec $H \in (AB)$)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

Attention : quand $H \notin [AB]$, le produit scalaire pourra être négatif ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ pas le



même sens)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$$

2) Produit scalaire et cosinus :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs différents du vecteur nul, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

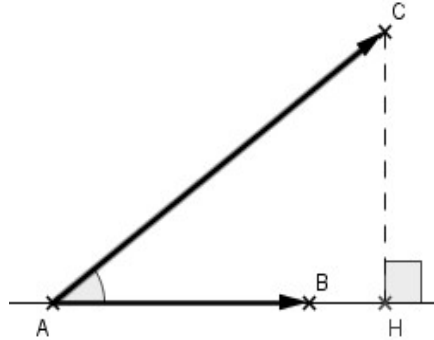
Démonstration :

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $A \neq B$ et $A \neq C$

On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Deux cas sont à envisager :

a) Premier cas : $H \in [AB]$:

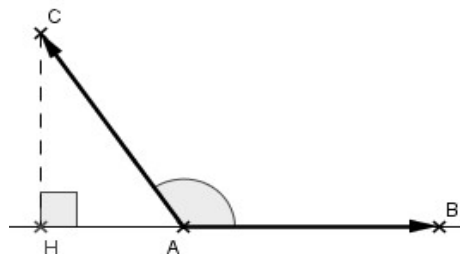


$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ (d'après l'écriture du produit scalaire à l'aide des projetés orthogonaux)

$$\cos(\vec{u} ; \vec{v}) = \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{AH}{AC} \text{ D'où : } AH = AC \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$$

$$\text{Donc : } \vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$$

b) Deuxième cas : $H \notin [AB]$:



$$AH = AC \times \cos(\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}) = - AC \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$$

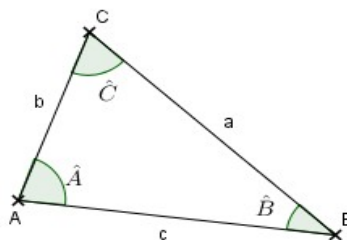
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = - AB \times AH = - AB \times (- AC) \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$$

Exemple : ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = a$ (avec $a > 0$) et

$$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6} \text{ alors : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos \frac{\pi}{6} = a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

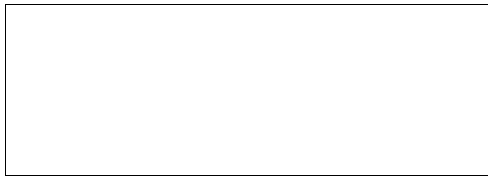
3) Applications trigonométriques :

a) Relations d'Al-Kashi :



Traditionnellement, on note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\widehat{BAC} = \hat{A}$, $\widehat{ACB} = \hat{C}$ et $\widehat{ABC} = \hat{B}$

Nous avons trois relations :



Démonstration :

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2cb \cos \hat{A} \end{aligned}$$

Les deux autres relations se montrent de la même manière.

Exemple :

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 5,5 \text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 42^\circ$
Calculer BC.

b) Formule des sinus :

Si on note S : l'aire du triangle ABC, alors :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$$

On a la formule des sinus :

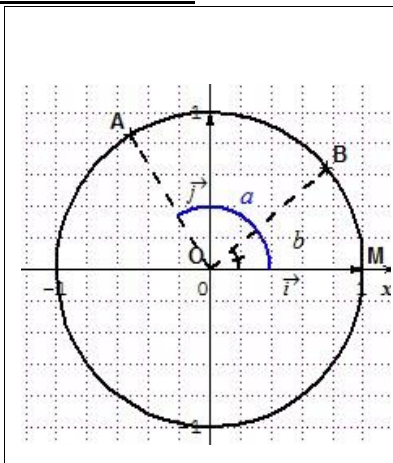


c) Formules d'addition des cosinus et sinus :

Soient a et b deux réels :



Démonstration :



Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on a $\overrightarrow{OA}(\cos a ; \sin a)$ et $\overrightarrow{OB}(\cos b ; \sin b)$

où : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OB}|| \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos(-a + b) \\ &= \cos(b - a) = \cos(a - b) \end{aligned}$$

Donc :

$$\underline{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

Les autres relations se démontrent de la même manière

Exemple :

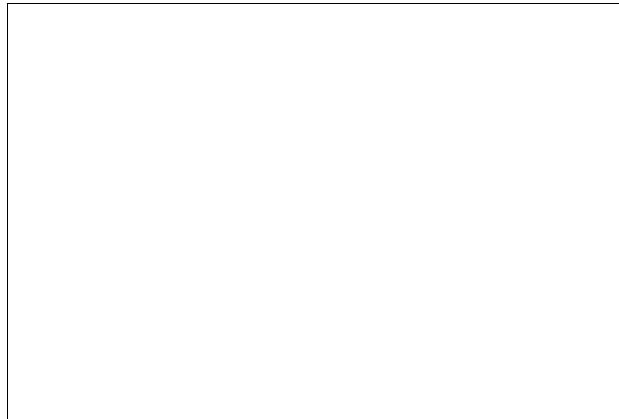
$$\text{On a } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\text{D'où : } \cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

d) Formules de duplication :

Soit $a \in \mathbb{R}$



Démonstrations:

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \\ &= \underline{\cos^2 a - \sin^2 a} \end{aligned}$$

$$\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = \underline{2 \sin a \cos a}$$

Comme on a démontré que $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, alors :

$$\frac{1 + \cos 2a}{2} = \frac{1 + \cos^2 a - \sin^2 a}{2} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a + \cos^2 a - \sin^2 a}{2}$$

$$(\text{car } \cos^2 a + \sin^2 a = 1)$$

$$= \underline{\cos^2 a}$$

On démontre de même la dernière formule.