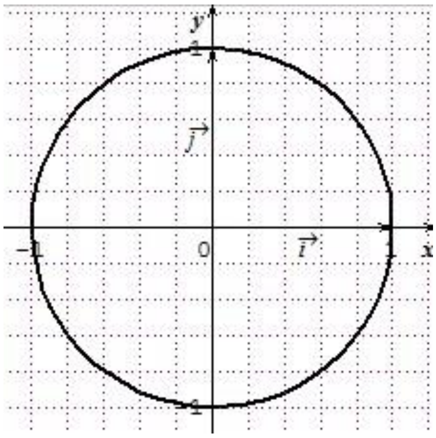
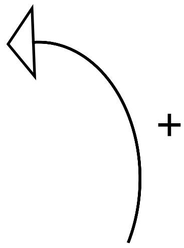
Spé maths Première (M Mangeard)	**Trigonométrie.Fonctions trigonométriques**	Année scolaire 2019/2020

I) Généralités :

1) Définition d'un cercle trigonométrique

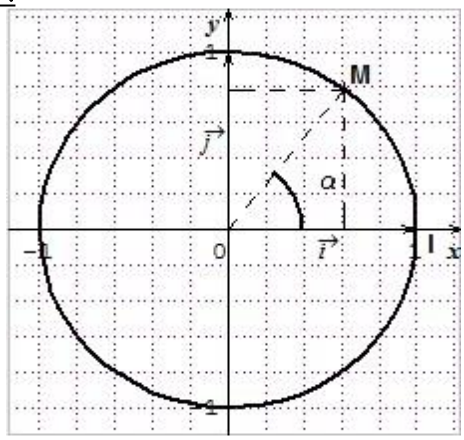
Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 sur lequel on définit un sens de parcours (sens direct)





Remarques :
- Le sens direct appelé aussi sens trigonométrique correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Attention à l'attribution des noms des angles avec Geogebra.

2) Angles associés à un point :



α = mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$

Périmètre du cercle = 2π (car le rayon = 1)

A chaque point M du cercle, on associe la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité M.

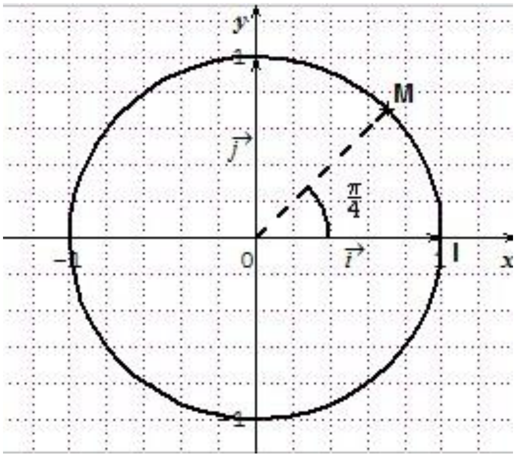
Exemple : Si M a pour coordonnées (- 1;0) alors on peut lui associer le nombre π (= longueur du demi-cercle trigonométrique)

En fait, tous les 2π on revient au même point.

Autrement dit : Si M est associé à un angle α, alors il est également associé à α' tel que :

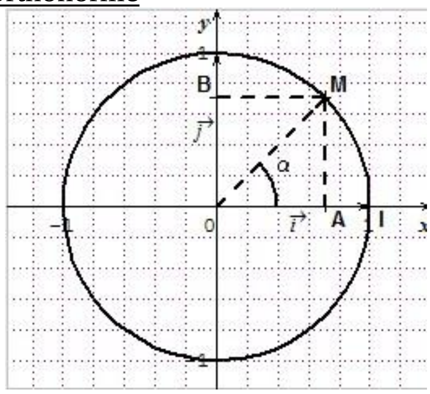
$$\boxed{\alpha' = \alpha + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}}$$

Exemples :



M est aussi associé à $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, et aussi à $\frac{17\pi}{4}$, et encore à - $\frac{7\pi}{4}$
(= $\frac{\pi}{4}$ - 2π)

3) <u>Coordonnées de M dans le repère orthonormé</u>



Le triangle MOA est rectangle en A. On a $\cos \alpha = \frac{OA}{OM}$= OA = Abscisse de M

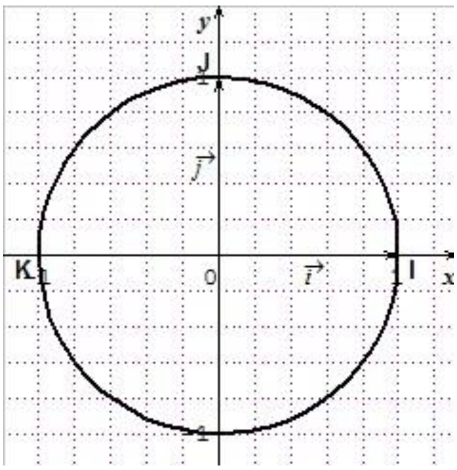
De même, $\sin \alpha = \frac{AM}{OM}$= AM = Ordonnée de M

Donc <u>M a pour coordonnées (cos α ; sin α)</u>

4) <u>Valeurs remarquables :</u>

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
cos α	1	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sin α	0	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Démonstrations :</u>

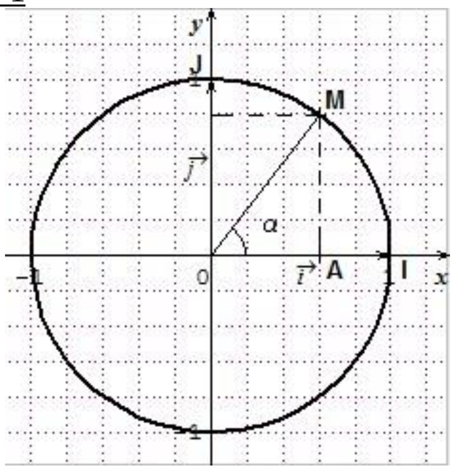


$\cos 0 = x_I = 1$ $\sin 0 = y_I = 0$ $\cos \pi = x_K = -1$ $\sin \pi = y_K = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = x_J = 0$ $\sin \frac{\pi}{2} = y_J = 1$

- Pour les cos $\frac{\pi}{4}$ et sin $\frac{\pi}{4}$, se placer dans un triangle rectangle et isocèle
- Pour les cos et sin en $\frac{\pi}{3}$ et en $\frac{\pi}{6}$, se placer dans un triangle équilatéral.

5) Relation $(\sin\ x)^2 + (\cos\ x)^2 = 1$



Dans le triangle OMA, rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OA^2 + AM^2$$

Or, OM = 1 et OA = x_M = cos α et AM = y_M = sin α

D'où : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Notation : $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

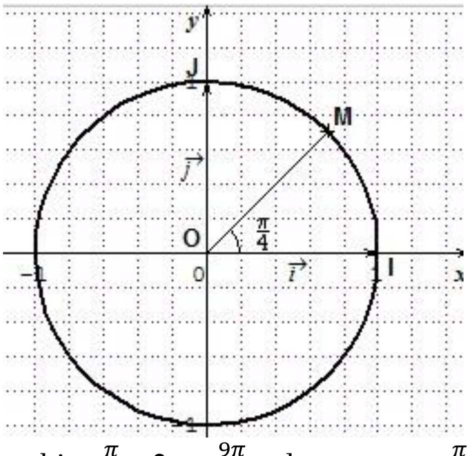
II) **Radian : une nouvelle unité d'angle :**

1) Définition :

Une mesure en radians d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Conséquence : Un angle a une infinité de valeurs en radians (toutes déterminées à un nombre pair de fois π près)

Exemple :



L'angle $\widehat{IOM}$ a une mesure de $\frac{\pi}{4}$ rad ou bien $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ rad ou encore : $\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$ rad, $\frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$ rad, etc...

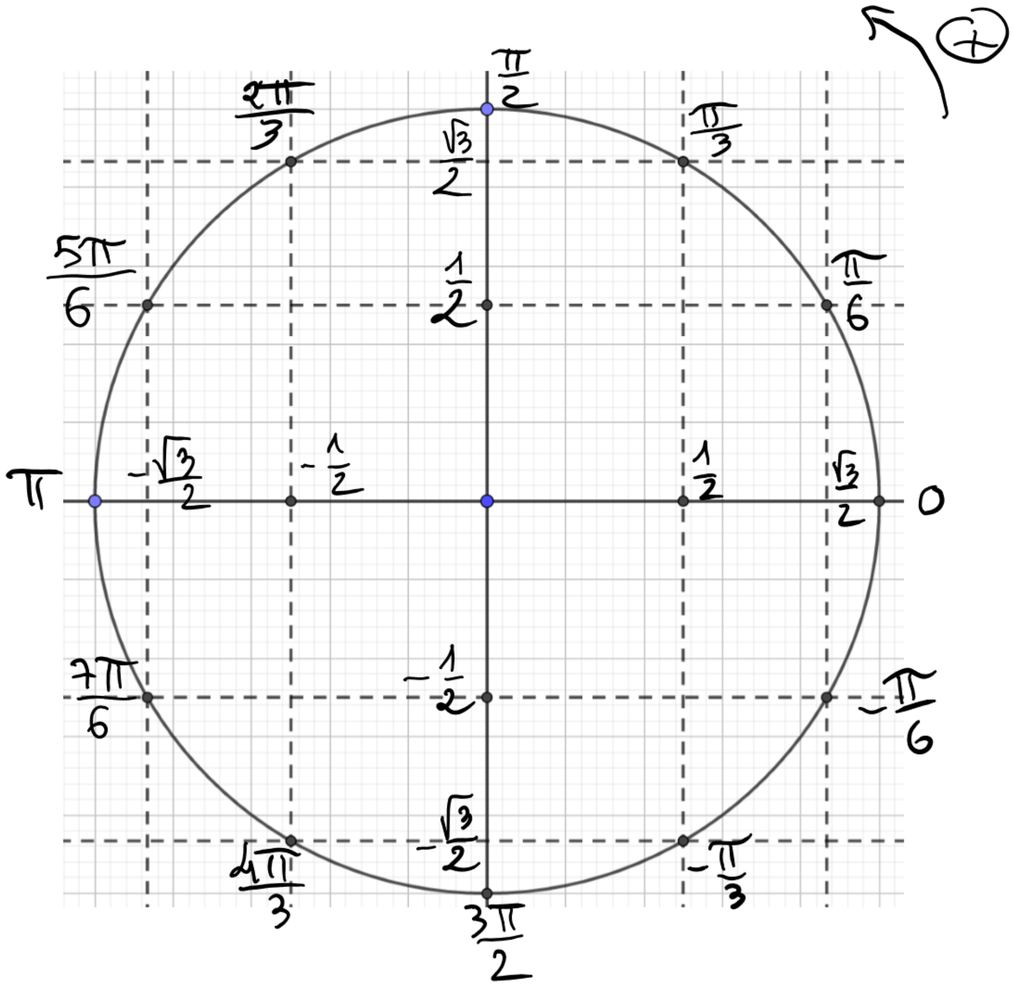
2) Conversion degrés-radians

Il y a proportionnalité entre les radians et les degrés par la correspondance :

$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

Exemples :

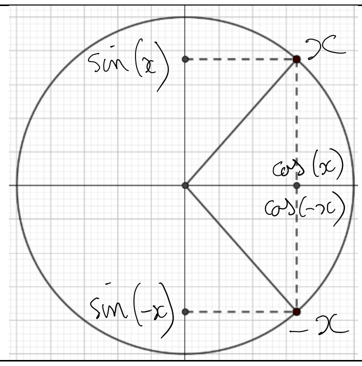
$\frac{\pi}{2}$ rad = 90° $\frac{\pi}{4}$ rad = 45° $\frac{\pi}{3}$ rad = 60° $\frac{\pi}{6}$ = 30°



3) Angles associés :

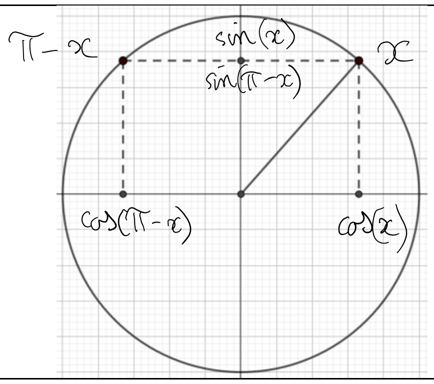
Soit $x \in \mathbb{R}$

a) Entre x et -x :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>cos (-x) = cos (x)

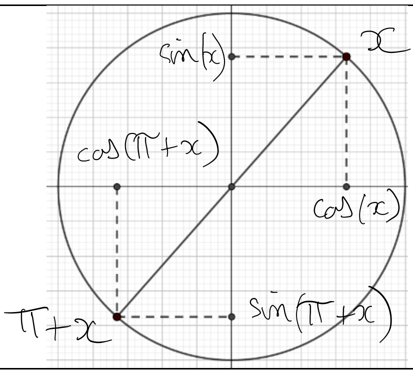
sin(-x) = -sin(x)</td>
</tr>
</table>

b) Entre x et π – x :

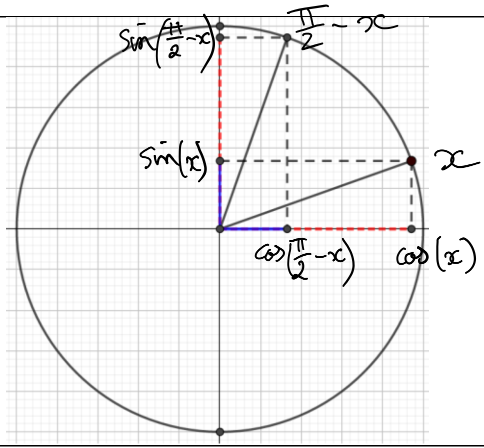
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>cos(π – x) = - cos (x)

sin(π – x) = sin (x)</td>
</tr>
</table>

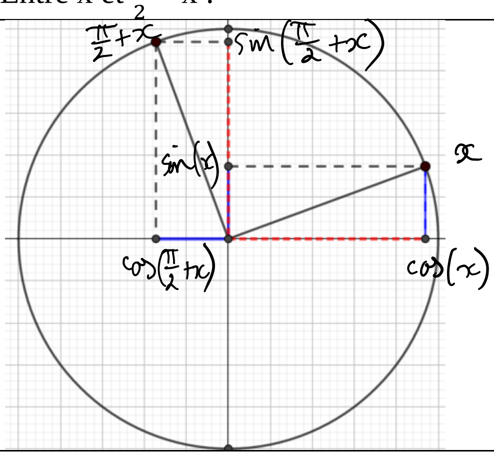
c) Entre x et $\pi + x$:

	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

d) Entre x et $\frac{\pi}{2} - x$:

	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

e) Entre x et $\frac{\pi}{2} + x$:

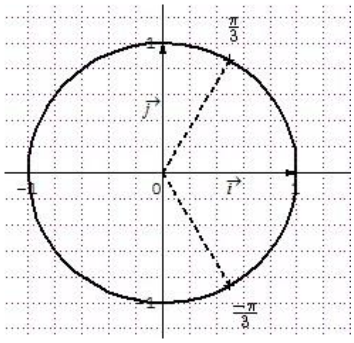
	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

III) <u>Equations trigonométriques :</u>

Dans ces équations, on va chercher l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient une égalité contenant des sinus et des cosinus.

<u>Exemple :</u>

Considérons l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

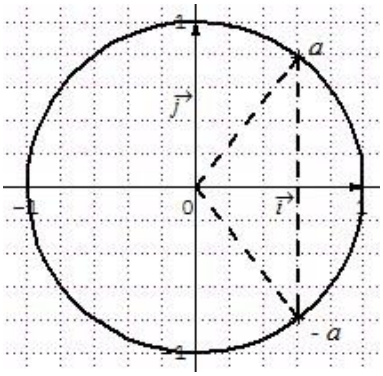


Sur le cercle trigonométrique, deux valeurs vérifient cette équation : $\frac{\pi}{3}$ et - $\frac{\pi}{3}$

Pour avoir l'ensemble de toutes les solutions, il suffit de considérer ces deux valeurs à 2kπ près (k ∈ℤ)

D'où : S = {$\frac{\pi}{3}$ + 2kπ , - $\frac{\pi}{3}$+ 2k'π , k,k' ∈ℤ }

1) Equations du type cos x = cos a



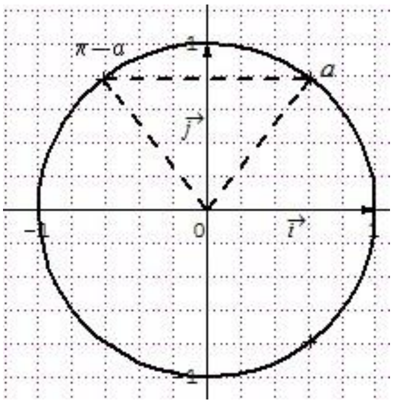
On a cos a = cos (- a)

Les solutions de l'équation cos x = cos a sont :

{ a + 2kπ, - a + 2k'π avec k et k' entiers relatifs }

Si on cherche les solutions sur ℝ, il y a une infinité de solutions.
La plupart du temps, la résolution de ce type d'équation se fera sur un intervalle comme par exemple :]-π ; π] ou [0 ; 2π[, etc...

2) Equations du type sin x = sin a



On a sin (π – a) = sin a

Les solutions de l'équation sin x = sin a sont :

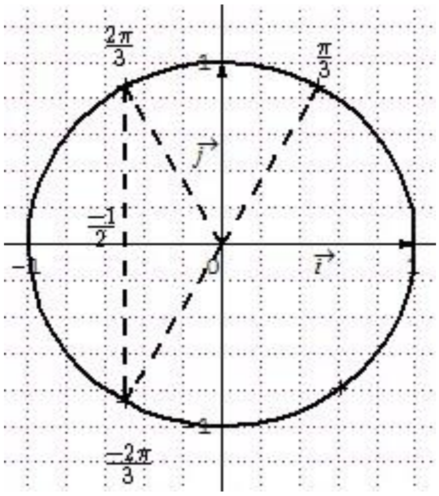
{a + 2kπ, π - a + 2k'π avec k et k' entiers relatifs }

Exemples de résolutions :

1) Résoudre dans [- π ; π [l'équation suivante :

$$\cos\ x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

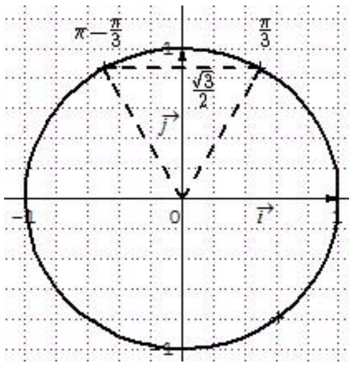


Dans [- π ; π[, il n'y a que deux solutions : - $\frac{2\pi}{3}$et $\frac{2\pi}{3}$

Donc : S = {- $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$}

2) Résoudre dans [0;2π[, l'équation : sin x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

On sait que sin $\frac{\pi}{3}$= $\frac{\sqrt{3}}{2}$



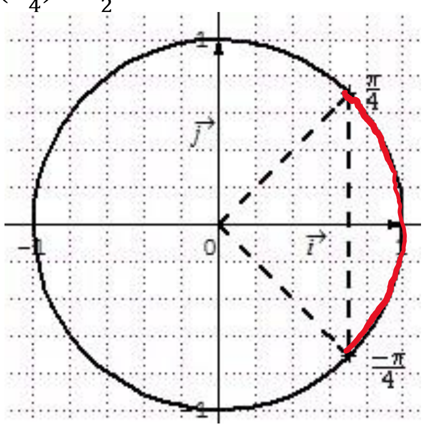
Or, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont dans [0;2π[

Donc S = {$\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$}

<u>Exemple de résolution d'une inéquation trigonométrique :</u>

cos x > $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l’intervalle [-π ;π] :

On sait que cos $\frac{\pi}{4}$= cos (- $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$



S =]- $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$[

III) Fonctions trigonométriques :

1) Fonction cosinus :

a) Définition :

La fonction f définie sur ℝ par f(x) = cos(x) est appelée **fonction cosinus**

b) Périodicité :

La fonction cosinus est 2π – périodique, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\text{ , } \cos(2\pi + x) = \cos(x)}$$

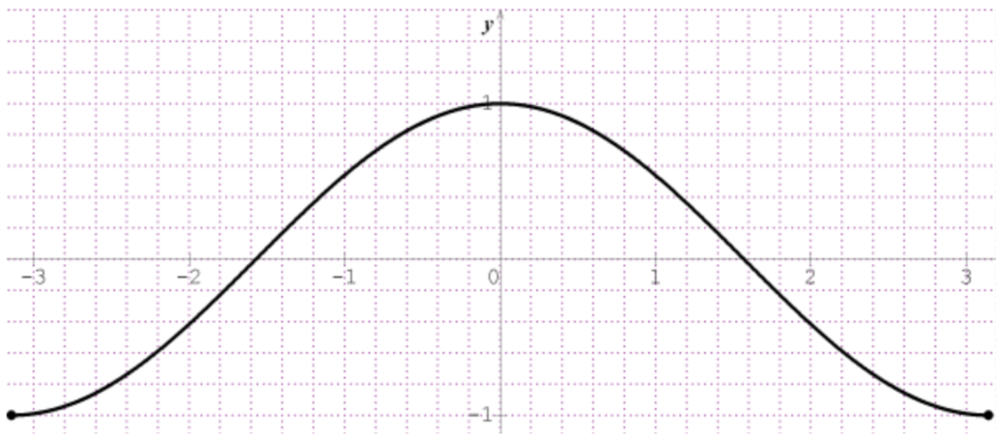
Conséquence importante : Il suffira de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, comme [0 ;2π[ou]-π ;π], par exemple.

c) Variations sur [-π ;π] :

x	-π	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	-1 ↗	0	1 ↘	0	-1

d) Représentation graphique :

La fonction cosinus se représente graphiquement sous la forme d'une **sinusoïde**



Sur [-π ;π]

e) Parité :

La sinusoïde représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. *La fonction cos est donc paire*.

Preuve : Soit x ϵℝ, cos(-x) = cos(x)

Remarque : On peut donc étudier cette fonction sur [0 ;π] et déduire le reste par symétrie.

2) Fonction sinus :

a) Définition :

La fonction f définie sur ℝ, par f(x) = sin(x) est **la fonction sinus**.

b) Périodicité :

La fonction sinus est 2π – périodique, c'est-à-dire :

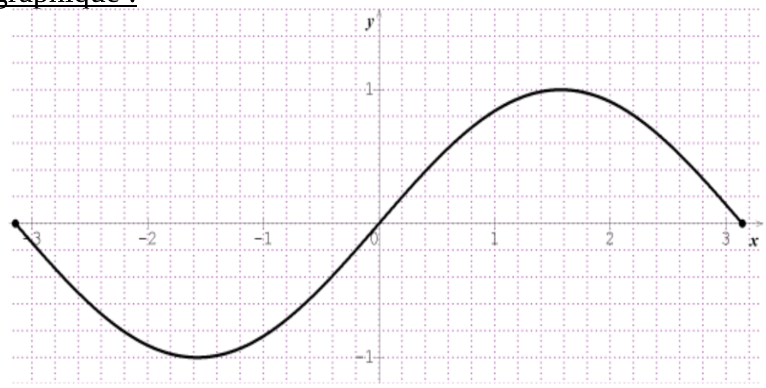
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \sin(2\pi + x) = \sin(x)}$$

Conséquence importante : Il suffira de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, comme [0 ;2π[ou]-π ;π], par exemple.

c) Variations sur [-π ;π] :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin(x)	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

d) Représentation graphique :



Sur [-π ;π]

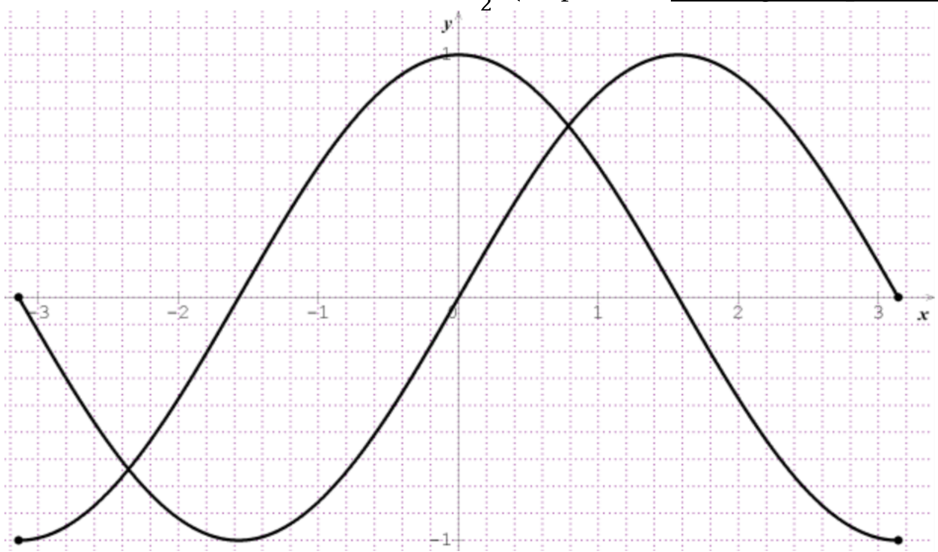
e) Parité :
La sinusoïde représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La fonction sin est donc impaire.

Preuve : Soit x ∈ℝ, sin(-x) = -sin(x)

Remarque : On peut donc étudier cette fonction sur [0 ;π] et déduire le reste par symétrie.

Remarque : Les deux sinusoïdes sont décalées de $\frac{\pi}{2}$ (on parle de **décalage en quadrature**) :



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$