Spé Maths Première (M Mangeard)	**Fonction exponentielle**	Année scolaire 2019/2020

I) Existence et unicité d'une fonction f définie et dérivable sur ℝ telle que : f(0) = 1 et f ' = f :

1) Propriété :

> Soit f une fonction définie et dérivable sur ℝ telle que f(0) = 1 et f ' = f , alors f ne s'annule pas

Démonstration :

2) Théorème :

> Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur ℝ telle que f(0) = 1 et f ' = f

Démonstration :

3) Définition :

L'unique fonction f définie ci-dessus est appelée **fonction exponentielle.**
Pour l'instant, on va noter $f(x) = \exp(x)$

II) Propriétés algébriques :

1) Relation fonctionnelle :

$$\boxed{\text{Pour tous } x, y \text{ réels, } \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$

Démonstration :

2) Autres propriétés :

Pour tous x, y réels :

a) $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ $\qquad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c) Pour tout n entier relatif, $(\exp(x))^n = \exp(nx)$

Exemples :

$\exp(5)\times\exp(10) = \exp(5+10) = \exp(15)$

$(\exp(7))^2 = \exp(2\times7) = \exp(14)$

$\dfrac{2}{\exp(8)} = 2 \times \exp(-8) = 2\times\exp(-4\times2) = 2 \times (\exp(2))^{-4}$

III) Notation e^x :

On note $\exp(1) = e \simeq 2{,}718$

Ce nombre est appelé **le nombre d'Euler**

(Leonhard EULER (1707-1783) : Mathématicien suisse)

Propriété :

Soit n un entier relatif, alors $\exp(n) = \exp(n\times1) = (\exp(1))^n$

$= e^n$

Par extension, pour tout x réel, on a :

$$\boxed{\exp(x) = e^x}$$

A partir de maintenant, nous utiliserons cette notation

Remarque : Toutes les propriétés algébriques du II) peuvent s'écrire avec la nouvelle notation

Soient x, y deux réels et n un entier :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
$$(e^x)^n = e^{nx}$$

IV) Etude de la fonction exponentielle :

1) Définition :

La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$

2) Signe :

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ e^x > 0}$

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$, car on sait déjà que $e^x \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

(car $e^{a+b} = e^a \times e^b$)

3) Dérivation :

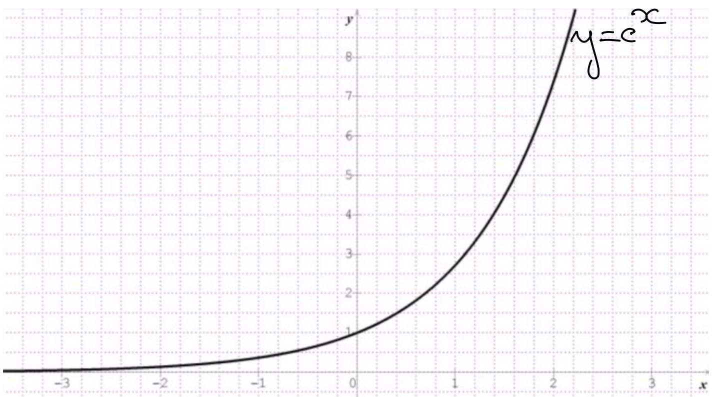
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

4) Variations :

Soit $f(x) = e^x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (d'après 2))

Donc : **la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**

5) Courbe représentative :



Remarques :

- La courbe n'atteint JAMAIS l'axe des abscisses (on dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction exponentielle)
- $e^0 = 1$
- Pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ (cette inégalité est souvent très utile et le sera en Terminale)

V) <u>Résolutions d'équations et d'inéquations avec les exponentielles :</u>

Soient a et b, deux réels :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

<u>Exemples :</u>

1) Résoudre l'équation suivante : $e^{5x+2} = e^{-3x+1}$

$e^{5x+2} = e^{-3x+1} \Leftrightarrow 5x + 2 = -3x + 1$

$\Leftrightarrow 8x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}$

Donc : $S = \{-\frac{1}{8}\}$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $e^{x^2} \leq \frac{1}{e^{-3}}$

$\Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^3$
$\Leftrightarrow x^2 \leq 3$
$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$

Donc : $S = [-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$

VI) <u>Fonctions du type : e^{ax+b} avec a et b , deux réels :</u>

Soit <u>$f(x) = e^{ax+b}$</u>, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et <u>$f'(x) = ae^{ax+b}$</u>

$e^{ax+b} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le signe de a donne le signe de f '

Autrement dit : - si a > 0, f ' est positive, donc f est croissante

- Si a < 0, f ' négative, donc f est décroissante

<u>Exemple :</u>

Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = e^{-5x+2}$ sur [-3 ;5]

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = -5e^{-5x+2} < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc f est strictement décroissante sur [-3 ;5]

x	-3	5
Signe de f '(x)	—	
Variations de f	e^{17} $\searrow$	e^{-23}

VII) **Etude de la suite de terme général (e^{na}), avec a réel et n, un entier naturel :**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{na}$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$

Démonstration :

$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{(na+a)} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (u_n) est une suite géométrique de raison e^a , et de premier terme $u_0 = e^0 = 1$