Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Droites (équations réduites, équations cartésiennes, systèmes)/Probabilités conditionnelles*	Fait le jeudi 16/01/2020

Exercice 1 : (5 points)

Soient A(-5 ;2) et B(6 ;-1) dans un repère du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en détaillant la méthode :

Soit $M(x;y) \in (AB)$:

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)

$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$

$(6-(-5)\,;\,-1-2)$

$(11\,;\,-3)$

$\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de (AB)

$\overrightarrow{AM}\,(x+5\,;\,y-2)$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont deux vecteurs directeurs de la même droite, ils sont donc colinéaires.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 11 \\ y-2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(x+5) - 11(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 11y - 15 + 22 = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 11y + 7 = 0$

Equation cartésienne de (AB)

2) Déterminer l'équation réduite de (AB). En déduire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette droite.

D'après 1) : $-3x - 11y + 7 = 0 \Leftrightarrow -11y = 3x - 7$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{11}x - \frac{7}{11}$

Equation réduite de (AB)

$\begin{cases} a = -\frac{3}{11} : \text{coefficient directeur} \\ b = -\frac{7}{11} : \text{ordonnée à l'origine.} \end{cases}$

Exercice 2 : (7 points)

On considère les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives : $2x - 4y + 7 = 0$ et $-x + 5y - \frac{17}{4} = 0$

1) Montrer soigneusement que (d_1) et (d_2) sont sécantes :

Méthode ① : pour (d_1) : $a_{d_1} = 2$ et $b_{d_1} = -4$

d'où $\vec{u_1}(\underbrace{-b_{d_1}}_{=4} ; \underbrace{a_{d_1}}_{=2})$ vecteur directeur de (d_1)

$\vec{u_1}(4 ; 2)$

pour (d_2) : $a_{d_2} = -1$ et $b_{d_2} = 5$

d'où $\vec{u_2}(\underbrace{-b_{d_2}}_{=-5} ; \underbrace{a_{d_2}}_{=-1})$ vecteur directeur de (d_2)

et $\det(\vec{u_1} ; \vec{u_2}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-1) - 2 \times (-5)$
$= -4 + 10 = 6 \neq 0$

donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent : (d_1) et (d_2) sont sécantes

Méthode ② : On peut calculer le déterminant Δ du système :

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-1) \times (-4)$
$= 10 - 4 = 6 \neq 0$

Donc (d_1) et (d_2) sont sécantes

2) Calculer en valeurs exactes les coordonnées de leur point d'intersection A (La résolution du système se fera par la méthode de votre choix) :

Soit $A(x ; y)$ leur point d'intersection :
$(x ; y)$ solution du système suivant :

$\begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ -x + 5y = \frac{17}{4} \ (\times 2) \end{cases}$ Par combinaison : $\begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ -2x + 10y = \frac{17}{2} \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ 6y = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -7 \\ y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -6 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$

Donc A a pour coordonnées $\left(-3 ; \frac{1}{4}\right)$

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_3) telle que : (d_3) // (d_1) et $B(4 ;-1) \in (d_3)$

Soit $M(x;y) \in (d_3)$, comme $B \in (d_3)$,
$\overrightarrow{BM}$ est un vecteur directeur de (d_3)

or, $\overrightarrow{BM}(x-4 ; y+1)$

De plus, $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (d_1)

Comme $(d_1) // (d_3)$, $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM} ; \vec{u}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & 4 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-4) - 4(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y - 8 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 6 = 0$$

Equation cartésienne de (d_3)

Exercice 3 : (8 points)

Matisse est un grand amateur de sudoku. Il s'entraîne dans un magazine contenant 40% de grilles de niveau facile, 30% de niveau moyen et le reste de niveau difficile.

Il sait qu'il réussit les grilles de niveau facile dans 95% des cas, celles de niveau moyen dans 60% des cas et les difficiles seulement dans 40% des cas.

Une grille lui est proposé de manière aléatoire.

On considère les événements suivants :

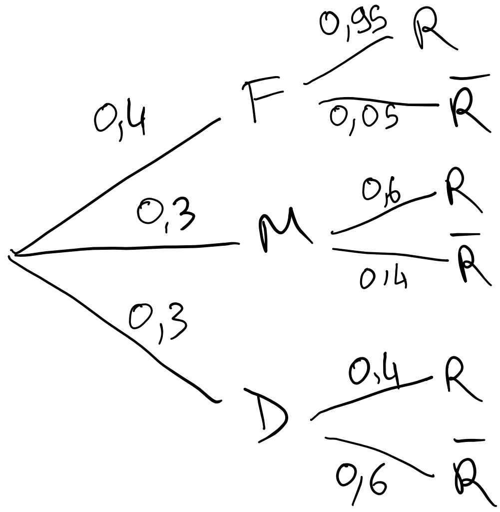
F : « La grille est de niveau facile »

M : « La grille est de niveau moyen »

D : « La grille est de niveau difficile »

R : « Matisse réussit la grille »

1) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre pondéré



2) Calculer la probabilité que la grille soit difficile et que Matisse la réussisse

$$P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0{,}3 \times 0{,}4 = \underline{0{,}12}$$

3) Montrer que P(R) = 0,68

$P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap M) + P(R \cap D)$ (car $\{F ; M ; D\}$ est une partition de Ω)

$= P(F) \times P_F(R) + P(M) \times P_M(R) + P(D) \times P_D(R)$ (formule des probabilités totales)

$= 0{,}4 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}3 \times 0{,}4$

$= 0{,}38 + 0{,}18 + 0{,}12$

$= \underline{0{,}68}$

4) On sait que Matisse n'a pas réussi la grille proposée. Quelle est la probabilité que cette grille soit de niveau moyen ?

$$P_{\bar{R}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}4}{1 - 0{,}68} = \underline{0{,}375}$$

5) Matisse a réussi la grille proposée. Marius lui dit « Je suis sûr que ta grille était facile ». Que penser de l'affirmation de Marius ? A-t-il plus de chances de se tromper que d'avoir raison ? Justifier par calcul.

$P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)} = \frac{0{,}95 \times 0{,}4}{0{,}68} \simeq 0{,}559$

$P_R(M) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}6}{0{,}68} \simeq 0{,}265$

$P_R(D) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}12}{0{,}68} \simeq 0{,}176$

$P_R(F) > P_R(M) > P_R(D)$: Marius a plus de chances d'avoir raison