

Spé Maths Première (M Mangeard)	<u>Corrigé du devoir de</u> <u>mathématiques :</u> <i>Suites (Partie I et Partie II) / Probabilités conditionnelles</i>	Fait le mardi 03 mars 2020 
---------------------------------------	---	---

Exercice 1 :

On considère les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) de termes généraux respectifs :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n, v_n = 7n - 1 \quad \text{et} \quad w_n = 2^n + 3, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ &= 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{3}{4} \\ &= u_n \times \frac{3}{4}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ donc } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2) Montrer que (v_n) est arithmétique de raison 7 :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 7(n+1) - 1 - (7n - 1) \\ &= 7n + 7 - 1 - 7n + 1 \\ &= 7, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ donc } (v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } 7 \end{aligned}$$

3) Montrer que (v_n) est une suite strictement croissante :

$$\begin{aligned} \text{Comme } v_{n+1} - v_n &= 7, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ avec } 7 > 0 \\ \text{donc } (v_n) &\text{ est une suite strictement croissante} \end{aligned}$$

4) Montrer que (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= 2^0 + 3 = 1 + 3 = 4 \\ w_1 &= 2^1 + 3 = 2 + 3 = 5 \\ w_2 &= 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} w_1 - w_0 &= 5 - 4 = 1 \text{ et } w_2 - w_1 = 7 - 5 = 2 \\ \text{alors } w_1 - w_0 &\neq w_2 - w_1, \text{ donc } (w_n) \text{ n'est pas} \\ &\text{une suite arithmétique.} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_1}{w_0} &= \frac{5}{4} \text{ et } \frac{w_2}{w_1} = \frac{7}{5} \\ &= \frac{25}{20} \quad \quad \quad = \frac{28}{20} \end{aligned} \right\} \frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}, \text{ donc } (w_n) \text{ n'est pas géométrique}$$

5) Programmer les suites (u_n) et (v_n) sur la calculatrice.

a) Conjecturer le comportement à l'infini de (u_n) :

Plus n augmente, plus u_n se rapproche de 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

b) Même chose pour la suite (v_n) :

Plus n augmente, plus (v_n) augmente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

c) A partir de quel rang n , $v_n > 4\,000$?

A partir d'un tableau de valeurs, on trouve à la calculatrice qu'à partir du rang 1572, $v_n > 4\,000$

d) A partir de quel rang n , $u_n < 0,05$?

A partir d'un tableau de valeurs, on trouve à la calculatrice qu'à partir du rang 17, $u_n < 0,05$

Exercice 2 :

Un habitant d'un village isolé ne peut se fournir en pain que dans deux boulangeries : soit A soit B.

- Si le villageois se rend à la boulangerie A, la probabilité qu'il s'y rende le lendemain est de 0,6
- Si le villageois se rend à la boulangerie B, la probabilité qu'il se rende dans l'autre le jour suivant est 0,4

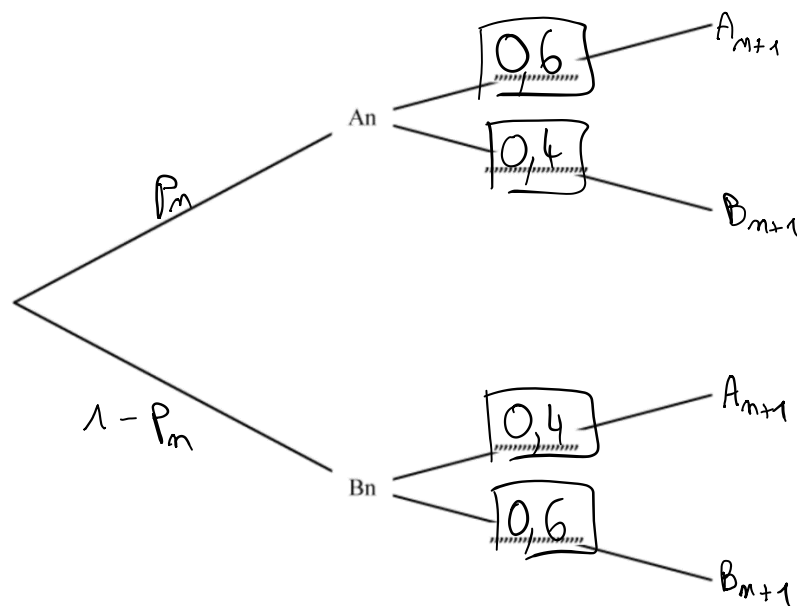
On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « Le villageois se rend à la boulangerie A le n ème jour ».

L'événement B_n : « Le villageois se rend à la boulangerie B le n ème jour »

$$p_n = P(A_n)$$

On suppose que le premier jour le client se rend à la boulangerie A (autrement dit : $p_1 = 1$)

1) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2) Avec les notations de l'énoncé, on a $P(A_{n+1}) = p_{n+1}$.

Montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \underline{p_{n+1}} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) \quad (\text{car } \{A_n; B_n\} \text{ partition de } \Omega) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\
 &= p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,4 \\
 &= 0,6p_n - 0,4p_n + 0,4 \\
 &= 0,2p_n + 0,4 = \underline{\underline{\frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}}}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

3) On pose $u_n = p_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que (u_n) est géométrique

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{5}p_n + \frac{4}{10} - \frac{5}{10} \\
 &= \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de 1^{er} terme:

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) Exprimer u_n en fonction de n :

Comme (u_n) est géométrique, $\underline{\underline{u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) En déduire p_n en fonction de n :

$$\underline{\underline{p_n = u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}}}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

d) Au cinquième jour, quelle est la probabilité que le client aille dans le magasin A ?

$$\begin{aligned}
 p_5 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{1}{2} \\
 &= \underline{\underline{0,5008}}
 \end{aligned}$$

- e) Au bout d'un très grand nombre de jours, le client a-t-il plus de chances de se rendre dans la boulangerie A ou dans la B ? Justifier.

Plus n augmente, plus $(\frac{1}{5})^{n-1}$ s'approche de 0

D'où, plus n augmente, plus p_n se rapproche de 0,5

Le client aura donc autant de chances d'aller en A qu'en B