Spé Maths Première (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Suites (Partie I et Partie II) /Probabilités conditionnelles*	Fait le mardi 03 mars 2020 **A**

Exercice 1 :

On considère les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) de termes généraux respectifs :

$u_n = 5n - 2$, $v_n = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $w_n = 3^n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (u_n) est arithmétique de raison 5.

$u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 2 - (5n-2)$
$= \cancel{5n} + 5 - \cancel{2} - \cancel{5n} + \cancel{2}$
$= 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est arithmétique de raison 5

2) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante :

Comme $u_{n+1} - u_n = 5 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
donc (u_n) est une suite strictement croissante

3) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$

$v_{n+1} = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$
$= 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{3}{4} = v_n \times \frac{3}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$

4) Montrer que (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$w_0 = 3^0 + 2 = 1 + 2 = 3$
$w_1 = 3^1 + 2 = 3 + 2 = 5$
$w_2 = 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

* $w_1 - w_0 = 5 - 3 = 2$ et $w_2 - w_1 = 11 - 5 = 6$
d'où $w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$, donc (w_n) n'est pas une suite arithmétique.

* $\frac{w_1}{w_0} = \frac{5}{3} = \frac{25}{15}$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{11}{5} = \frac{33}{15}$
d'où $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$, donc (w_n) n'est pas géométrique

5) Programmer les suites (u_n) et (v_n) sur la calculatrice.

a) Conjecturer le comportement à l'infini de (u_n) :

Il semblerait que plus n augmente, plus u_n augmente
Autrement dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) Même chose pour la suite (v_n) :

Il semblerait que plus n augmente, plus v_n se rapproche de 0

Autrement dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

c) A partir de quel rang n, $u_n > 4\,000$?

A l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, on trouve :

à partir de $n = 801$, $u_n > 4000$

d) A partir de quel rang n, $v_n < 0{,}05$?

A l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, on trouve :

à partir de $n = 18$, $v_n < 0{,}05$

Exercice 2 :

Un habitant d'un village isolé ne peut se fournir en pain que dans deux boulangeries : soit A soit B.

- Si le villageois se rend à la boulangerie A, la probabilité qu'il s'y rende le lendemain est de 0,8
- Si le villageois se rend à la boulangerie B, la probabilité qu'il se rende dans l'autre le jour suivant est 0,7

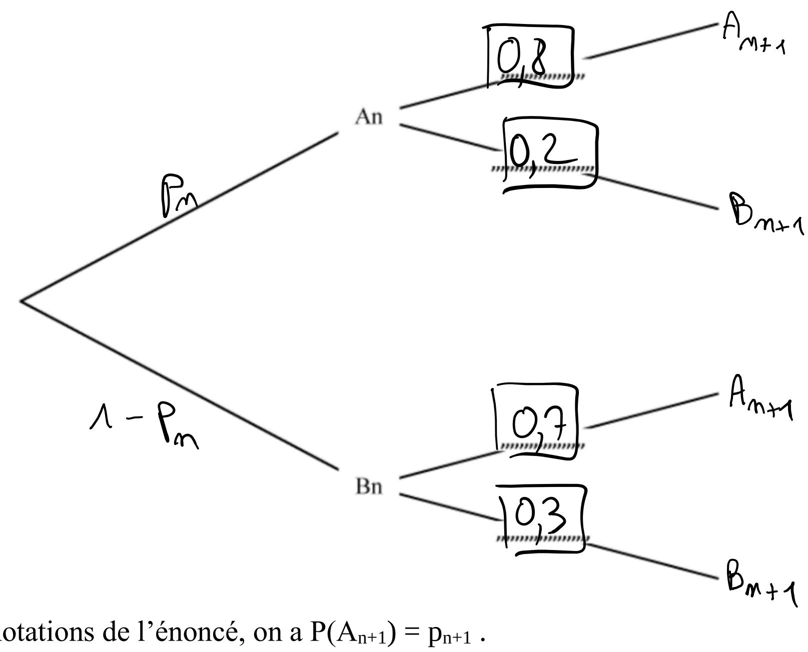
On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « Le villageois se rend à la boulangerie A le nième jour ».

L'événement B_n : « Le villageois se rend à la boulangerie B le nième jour »

$p_n = P(A_n)$

On suppose que le premier jour le client se rend à la boulangerie A (autrement dit : $p_1 = 1$)

1) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2) Avec les notations de l'énoncé, on a $P(A_{n+1}) = p_{n+1}$.

Montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{7}{10}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$ (car $\{A_n ; B_n\}$ est une partition de Ω)

$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$ (formule des probabilités totales)

$= p_n \times 0{,}8 + (1 - p_n) \times 0{,}7$

$= 0{,}8p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n$

$= 0{,}1p_n + 0{,}7 = \frac{1}{10}p_n + \frac{7}{10}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) On pose $u_n = p_n - \frac{7}{9}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que (u_n) est géométrique

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{7}{9}$

$= \frac{1}{10}p_n + \frac{7}{10} - \frac{7}{9}$

$= \frac{1}{10}p_n + \frac{63}{90} - \frac{70}{90}$

$= \frac{1}{10}p_n - \frac{7}{90} = \frac{1}{10}\left(p_n - \frac{7}{9}\right) = \frac{1}{10}u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de 1er terme : $u_1 = p_1 - \frac{7}{9} = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$

b) Exprimer u_n en fonction de n :

Comme (u_n) géométrique, $u_n = u_1 \times r^{n-1}$
$= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) En déduire p_n en fonction de n :

$p_n = u_n + \frac{7}{9} = \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{7}{9}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Au cinquième jour, quelle est la probabilité que le client aille dans le magasin A ?

$p_5 = \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \frac{7}{9} = 0{,}7778$

e) Au bout d'un très grand nombre de jours, le client a-t-il plus de chances de se rendre dans la boulangerie A ou dans la B ? Justifier.

Plus n augmente, plus $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ se rapproche de 0
d'où p_n se rapproche de $\frac{7}{9} > \frac{1}{2}$

Donc : le client a plus de chances de se rendre dans la boulangerie A au bout d'un très grand nombre de jours.