

Spé Maths Première (M Mangeard)	Correction du DM 2 : Equations de droites/ Vecteurs/ Coordonnées	Rendu le 9 janvier 2020
---------------------------------------	--	-------------------------

$$A(-3; -1) \quad B(6; 2) \quad C(3; 5) \quad D(-3; 3)$$

$$1) a) \underline{\overrightarrow{AB}} (x_B - x_A; y_B - y_A) \quad \underline{\overrightarrow{CD}} (x_D - x_C; y_D - y_C)$$

$$(6 - (-3); 2 - (-1)) \quad (-3 - 3; 3 - 5)$$

$$(\underline{9; 3}) \quad (\underline{-6; -2})$$

$$b) \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \times (-2) - 3 \times (-6)$$

$$= -18 + 18 = 0$$

Donc: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

c) Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, $(AB) \parallel (CD)$

Le quadrilatère ABCD possède deux côtés opposés parallèles.

Donc: ABCD est un trapèze

2) F milieu de $[CD]$:

$$\left. \begin{aligned} x_F &= \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0 \\ \text{et } y_F &= \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \end{aligned} \right\} \text{Donc : } \underline{F(0; 4)}$$

H milieu de $[AB]$:

$$\left. \begin{aligned} x_H &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 6}{2} = \frac{3}{2} \\ y_H &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{Donc : } \underline{H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)}$$

3)a) Droite (AD):

comme $x_A = -3 = x_D$, la droite (AD) est verticale

Son équation réduite : $x = -3$

$(\Leftrightarrow) \underline{x + 3 = 0}$: Equation cartésienne de (AD)

Droite (BC):

$x_B \neq x_C$ et $y_B \neq y_C$, d'où (BC) est oblique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} & (x_C - x_B; y_C - y_B) \\ & (3 - 6; 5 - 2) \\ & (-3; 3) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de (BC)

soit $M(x; y) \in (BC)$:

$\overrightarrow{BM} (x - 6; y - 2)$ est un autre vecteur directeur de (BC)

or, deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -3 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-6) - (y-2) \times (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 18 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x + y - 8 = 0}$$

(Equation cartésienne de la droite (BC))

6) Tout d'abord, comme (AD) est verticale et (BC) oblique elles sont sécantes. Notons $E(x; y)$ leur point d'intersection:

$$\begin{cases} x+3=0 \\ x+y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ -3+y-8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=11 \end{cases}$$

Donc: E a pour coordonnées $(-3; 11)$

$$4) \begin{cases} x_B = 6 \neq -3 = x_D \\ y_B = 2 \neq 3 = y_D \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_B \\ y_B \end{matrix}} \right\} \text{d'où (BD) est oblique}$$

$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3-6 \\ 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BD)

Soit $M(x; y) \in (BD)$:

$\overrightarrow{BM} (x-6; y-2)$ est un vecteur directeur de (BD)

D'où $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires

$$\overrightarrow{BD} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -9 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-6 - (y-2) \times (-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 9y - 6 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 9y - 24 = 0$$

(Equation cartésienne de (BD))

$$\left. \begin{array}{l} x_A = -3 \neq 3 = x_C \\ y_A = -1 \neq 5 = y_C \end{array} \right\} \text{ d'où (AC) droite oblique.}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} \\ (6; 6)$$

vecteur directeur de (AC)

$$\text{Soit } M(x; y) \in (AC)$$

$$\overrightarrow{AM} (x+3; y+1) \text{ autre vecteur directeur de (AC)}$$

$$\text{Ainsi: } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 6 \\ y+1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x+3) - (y+1) \times 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$$

(Equation cartésienne de (AC))

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ n'étant pas colinéaires, (AC) et (BD) sont sécantes. Notons $G(x; y)$, leur point d'intersection:

$$\begin{cases} x+9y-24=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+9y=24 \end{cases}$$

Par substitution:

$$\begin{cases} y = x+2 \\ x+9(x+2)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ 10x = 24-18=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5} + 2 = \frac{3}{5} + \frac{10}{5} = \frac{13}{5} \\ x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Donc: G a pour coordonnées $(\frac{3}{5}; \frac{13}{5})$

5) $E(-3; 11) \quad F(0; 4)$

(EF) droite oblique:

$\overrightarrow{EF} (0+3; 4-11)$
 $(3; -7)$ vecteur directeur de (EF)

Soit $M(x; y) \in (EF)$:

$\overrightarrow{EM} (x+3; y-11)$ autre vecteur directeur de (EF)

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EM}; \overrightarrow{EF}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ y-11 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -7(x+3) - (y-11) \times 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7x - 3y - 21 + 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{-7x - 3y + 12 = 0}$$

(Equation cartésienne de (EF))

6) On sait que $H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (question 2)

$$\text{or, } -7 \times \frac{3}{2} - 3 \times \frac{1}{2} + 12 = -\frac{21}{2} - \frac{3}{2} + \frac{24}{2}$$

$$= -\frac{24}{2} + \frac{24}{2} = 0$$

d'où $\underline{H \in (EF)}$

D'autre part, $G\left(\frac{3}{5}; \frac{13}{5}\right)$ (question 4)

$$\text{or, } -7 \times \frac{3}{5} - 3 \times \frac{13}{5} + 12 = -\frac{21}{5} - \frac{39}{5} + \frac{60}{5}$$

$$= -\frac{60}{5} + \frac{60}{5}$$

$$= 0$$

Donc: $\underline{G \in (EF)}$

Par conséquent: E, F, G et H sont alignés

