Spé Maths Première (M Mangeard)	**Correction du DS sur la dérivation et ses applications**	Rendu le 10/04/2020

Exercice 1 :

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7$

f est une fonction polynôme : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 0$

$= 9x^2 - 8x$

2) $g(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{x}$

$x \longmapsto 3\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

$x \longmapsto \frac{2}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

d'où g est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

$g'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

3) $h(x) = \frac{5x+2}{4-x}$

h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (fonction homographique = quotient de fonctions affines dérivable partout où elle est définie)

On pose $u(x) = 5x+2$ $\quad v(x) = 4-x$

$u'(x) = 5$ $\quad v'(x) = -1$

or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

d'où $h'(x) = \frac{5(4-x) - (5x+2) \times (-1)}{(4-x)^2} = \frac{20 - \cancel{5x} + \cancel{5x} + 2}{(4-x)^2}$

$= \frac{22}{(4-x)^2}$

4) $i(x) = \sqrt{7x-1}$

i est définie $\Leftrightarrow 7x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{7}$ c'est-à-dire sur $\left[\frac{1}{7} ; +\infty\right[$

i est alors dérivable sur $\left]\frac{1}{7} ; +\infty\right[$

On a : $i(x) = j(7x-1)$ avec $j(x) = \sqrt{x}$

$i'(x) = 7 \times j'(7x-1)$

$= 7 \times \frac{1}{2\sqrt{7x-1}} = \frac{7}{2\sqrt{7x-1}}$

Exercice 2 :

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

1) Soit $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 3(1+h)^2 + 2(1+h) - 1 \\ &= 3(1+2h+h^2) + 2 + 2h - 1 \\ &= 3 + 6h + 3h^2 + 1 + 2h \\ &= 3h^2 + 8h + 4 \end{aligned}$$

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3h^2 + 8h + \cancel{4} - \cancel{4}}{h} = \frac{\cancel{h}(3h+8)}{\cancel{h}} = 3h + 8$$

or, $3h + 8$ a une limite finie quand $h \to 0$, donc f est bien dérivable en 1

et $f'(1) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} 3h + 8 = 8$

2) f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier en $x = 1$)

$f'(x) = 3 \times 2x + 2 = 6x + 2$

$f'(1) = 6 \times 1 + 2 = \boxed{8}$

3) On a : $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\Leftrightarrow y = 8(x-1) + 4$

$\Leftrightarrow y = 8x - 4$ Equation réduite de T_1

Exercice 3 :

$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1$

1) f est une fonction polynôme : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + 2 \\ &= 3x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

2) Etude du signe de $f'(x)$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 3 \times 2 = 1 > 0$

Le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

or, $a = 3 > 0$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \in \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[$$

D'où :

$$f'(x) \geq 0 \text{ sur } \left[0 ; \frac{2}{3}\right] \cup \left[1 ; \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{et } f'(x) \leq 0 \text{ sur } \left[\frac{2}{3} ; 1\right]$$

Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	↗	$-\frac{13}{27}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{1}{4}$

$f(0) = -1$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{27}$

$f(1) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

3) Sur $\left[0 ; \frac{3}{2}\right]$: En $\frac{2}{3}$ et en 1, f' s'annule et change de signe

f admet donc en ces valeurs des extremums locaux

D'après les variations, $-\frac{13}{27}$ est un maximum local

et $-\frac{1}{2}$ est un minimum local