Seconde	**Fonctions du second degré**	Année scolaire 2012/2013

I) Fonction carré :

1) Définition :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe x^2 est appelée **fonction carré.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Exemples de calculs d'images par f :

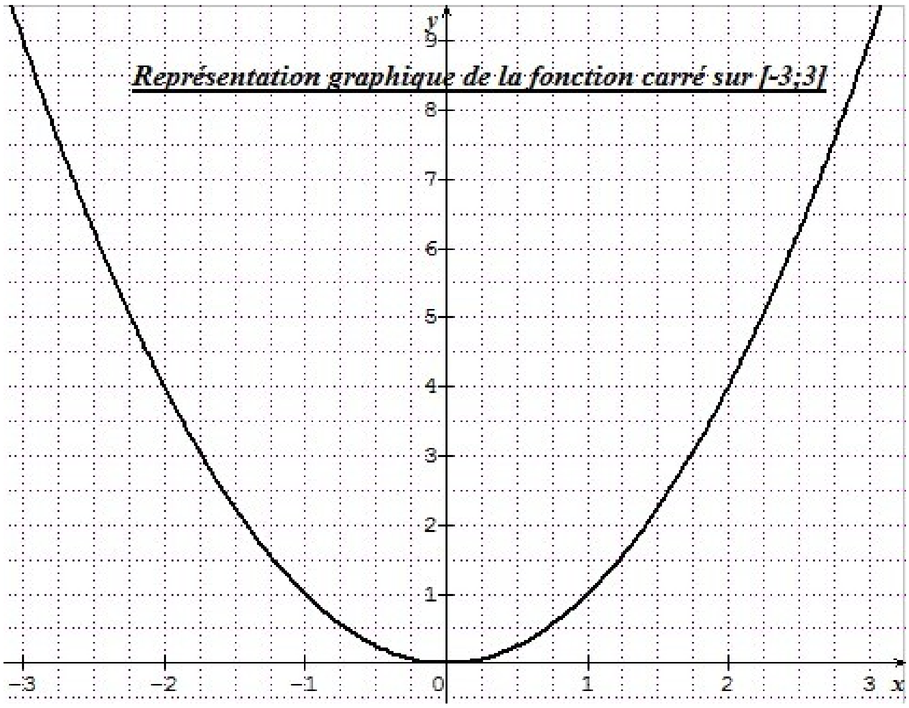
$f(9) = 9^2 = 81 = (-9)^2 = f(-9)$, $f(0) = 0$, $f(\frac{7}{4}) = (\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16}$

2) Représentation graphique :

La fonction carré est représentée par **une parabole** dans un repère orthogonal du plan.

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



3) Variations :

a) *Propriété :*

La fonction carré est strictement décroissante sur]-∞ ; 0] et strictement croissante sur [0;+∞[.

Démonstration sur [0;+∞[:

Soient u et v deux nombres de [0;+∞[tels que u < v :

$f(u) = u^2$ et $f(v) = v^2$

On doit comparer f(u) et f(v). Idée : On va étudier f(u) – f(v) et comparer à 0 :

$f(u) - f(v) = u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$ (identité remarquable)

Comme u et v sont positifs, $u + v > 0$

D'autre part, $u < v$, alors $u - v < 0$

Par conséquent : $(u + v)(u - v) < 0$

D'où : f(u) – f(v) < 0 c'est-à-dire : <u>f(u) < f(v)</u>

<u>Donc sur [0;+∞[, f est strictement croissante.</u>

<u>b) Tableau de variation :</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

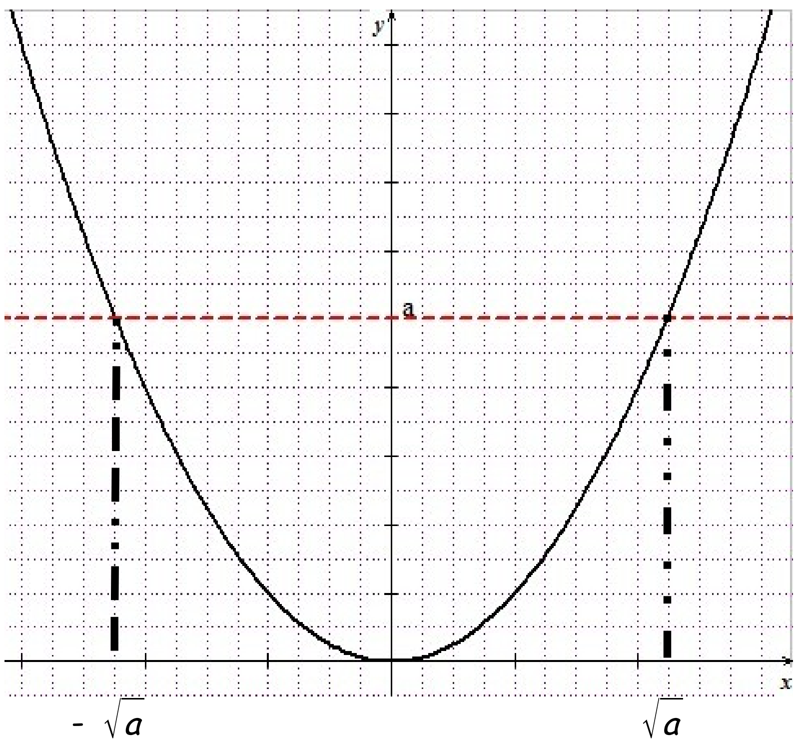
<u>4) Résolution graphique d'équations et d'inéquations :</u>

<u>a) Equations du type x^2 = a :</u>

Pour résoudre graphiquement l'équation x^2 = a, on trace la droite horizontale à l'ordonnée a et la parabole représentant la fonction carré.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite :

- Si a > 0 :



Cette équation a deux solutions : - $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$

$$\boxed{S = \{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\}}$$

- Si a = 0, la droite horizontale est l'axe des abscisses.

Il n'y a qu'un seul point d'intersection avec la parabole : l'origine du repère.

Donc l'équation x^2 = a n'a qu'une seule solution <u>**S = {0}**</u>

- Si a < 0, la droite horizontale ne coupe pas la parabole.

Donc l'équation x^2 = a n'a pas de solution réelle : <u>**S = Ø**</u>

<u>Exemples :</u>

<u>1) Résoudre $9x^2 = 4$</u>

D'où : $x^2 = \dfrac{4}{9} > 0$ d'où l'équation admet deux solutions

$S = \{-\sqrt{\frac{4}{9}}\ ;\ \sqrt{\frac{4}{9}}\}$ C'est-à-dire : $S = \{-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\}$

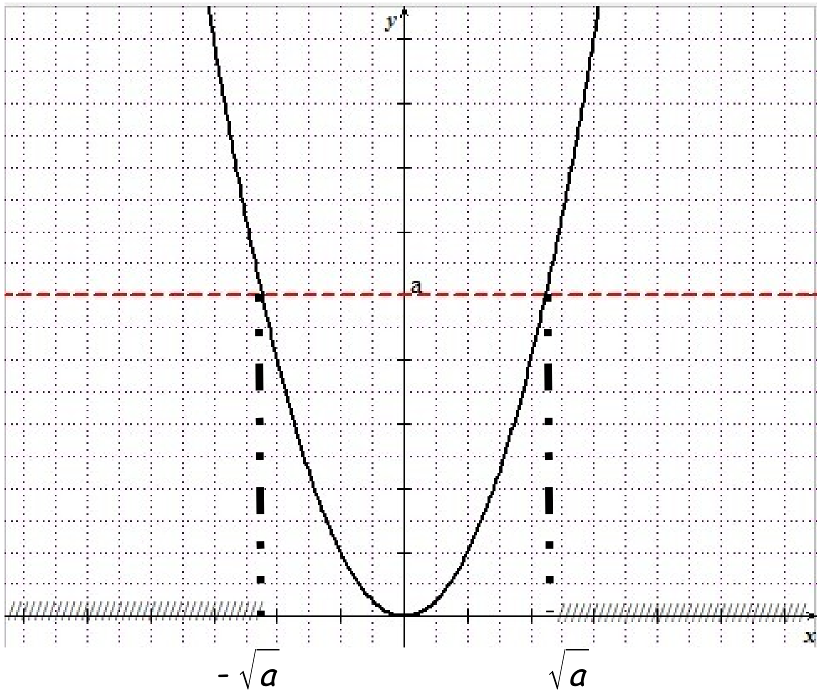
2) Résoudre $5x^2 + 1 = 0$

$5x^2 = -1$ d'où : $x^2 = -\frac{1}{5} < 0$ donc l'équation n'a aucune solution réelle **$S = \varnothing$**

b) Inéquations du type $x^2 > a$ (ou $x^2 < a$)

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 > a$, on trace la parabole représentant la fonction carré et la droite horizontale à l'ordonnée a. Les solutions sont les abscisses de tous les points de la parabole situés au-dessus de la droite.

- Cas où a > 0 :



Les solutions de $x^2 > a$ sont données par :

$S =]-\infty;-\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a};+\infty[$

Remarque :

Si l'inégalité est large $x^2 \geq a$, il suffit de fermer les crochets aux bornes finies :

$S =]-\infty;-\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a};+\infty[$

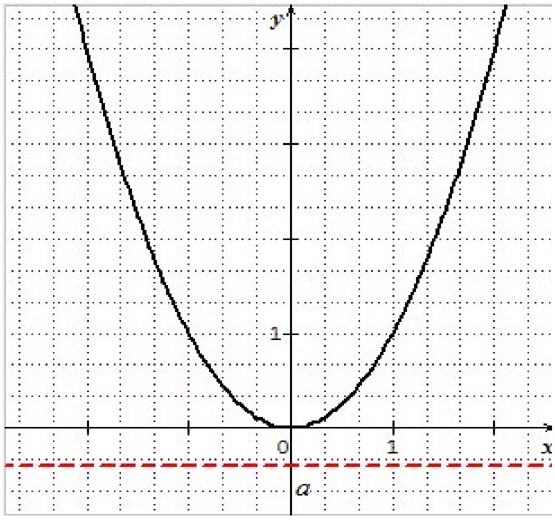
* L'inéquation $x^2 < a$ admet pour solutions : $S =]-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}[$
* L'inéquation $x^2 \leq a$ admet pour solutions : $S = [-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}]$

- Cas où a = 0 :

* L'inéquation $x^2 > a$ admet pour solutions : $S = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
* L'inéquation $x^2 \geq a$ admet pour solutions : $S = \mathbb{R}$
* L'inéquation $x^2 < a$ n'admet aucune solution réelle : $S = \varnothing$
* L'inéquation $x^2 \leq a$ admet une seule solution : $S = \{0\}$

- Cas où a < 0 :

Dans ce cas, la droite horizontale à l'ordonnée a ne coupe pas du tout la parabole représentant la fonction carré.

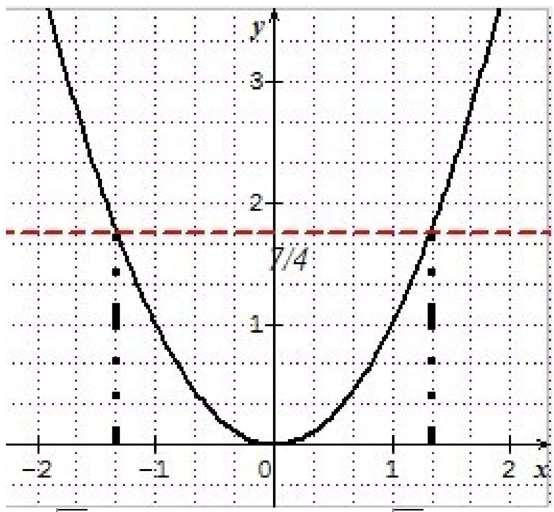


* L'inéquation $x^2 > a$ admet pour solutions S = ℝ
* L'inéquation $x^2 \geq a$ admet pour solutions S = ℝ
* L'inéquation $x^2 < a$ n'admet aucune solution réelle : S = ∅
* L'inéquation $x^2 \leq a$ n'admet aucune solution réelle : S = ∅

Exemple :

Résoudre l'inéquation suivante : $4x^2 - 5 \geq 2$

On a $4x^2 \geq 7$ d'où : $x^2 \geq \frac{7}{4}$ avec $\frac{7}{4} > 0$



$-\sqrt{\frac{7}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc les solutions de l'inéquation sont :

$$\boxed{S =]-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{7}}{2};+\infty[}$$

Remarque :

Algébriquement, on pouvait résoudre l'inéquation précédente :

En effet, $4x^2 \geq 7 \Leftrightarrow 4x^2 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (\sqrt{7})^2 \geq 0$

On utilise l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(2x)^2 - (\sqrt{7})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x + \sqrt{7})(2x - \sqrt{7}) \geq 0$

Ensuite, on va faire un tableau de signes :

$2x + \sqrt{7} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\qquad$ $2x - \sqrt{7} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{7}}{2}$		$\frac{\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x + \sqrt{7}$		-	0	+		+	
Signe de $2x - \sqrt{7}$		-		-	0	+	
Signe du produit		+	0	-	0	+	

On retrouve $S =]-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{7}}{2}; +\infty[$

<u>5) Application : Encadrement de x^2 le plus fin possible</u>

On considère $x \in [a;b]$ et on souhaite encadrer x^2 le plus finement possible.

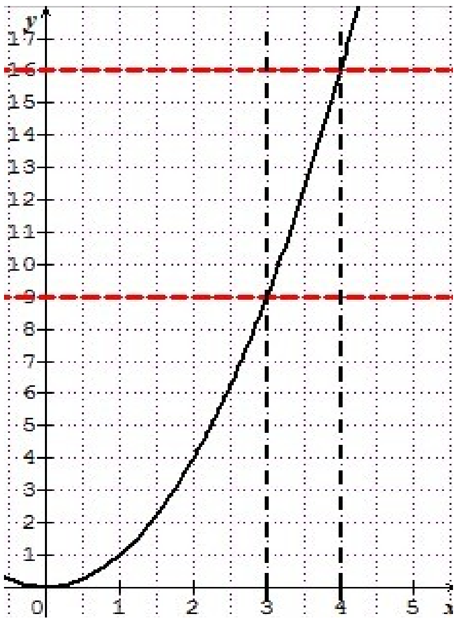
Trois cas sont à envisager :

<u>a) Les bornes qui encadrent x sont toutes les deux positives :</u>

$$\boxed{\text{Si } x \in [a;b]\text{, alors } x^2 \in [a^2;b^2]}$$

<u>Exemple :</u>

Si $3 \leq x < 4$



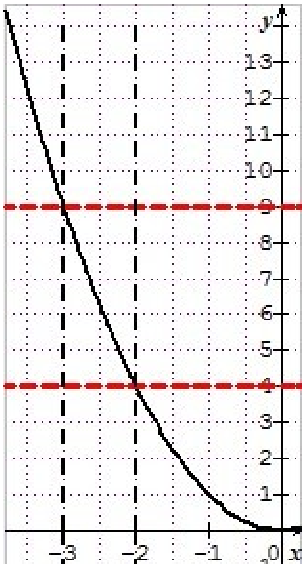
alors : <u>$9 \leq x^2 < 16$</u>

<u>b) Les bornes qui encadrent x sont toutes les deux négatives :</u>

$$\boxed{\text{Si } x \in [a;b]\text{, alors } x^2 \in [b^2;a^2]}$$

<u>Exemple :</u>

Si $-3 \leq x \leq -2$

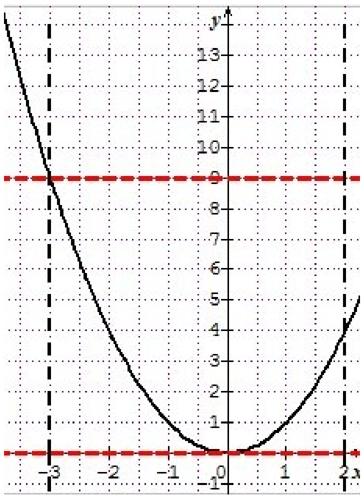


alors <u>$4 \leq x^2 \leq 9$</u>

<u>c) Les bornes qui encadrent x sont de signes différents :</u>

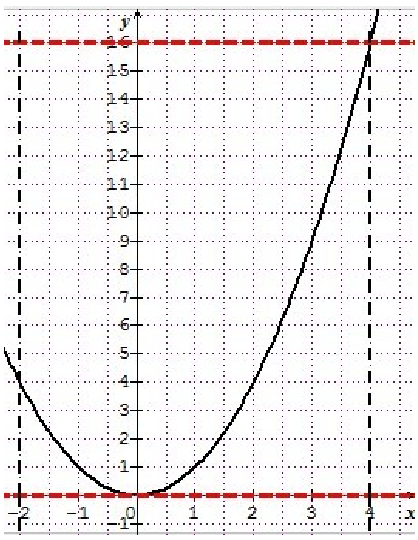
<u>Exemples :</u>

- Si $x \in [-3;2]$:



alors $x^2 \in [0;9]$

- Si $x \in [-2;4]$



alors <u>$0 \leq x^2 \leq 16$</u>

II) Fonction trinôme du second degré :

1) Définition :

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée fonction trinôme du second degré.

Exemples :

$f(x) = 3x^2 - 6x + 7$. f est un trinôme du second degré avec a = 3, b = - 6 et c = 7

$g(x) = \frac{5}{3}x^2 - 3$.   g est un trinôme du second degré avec $a = \frac{5}{3}$, b = 0 et c = - 3

2) Représentation graphique :

a) Propriété :

Activité de découverte sous Geogebra :
Cliquer sur le lien suivant :
http://mangeard.maths.free.fr/Ecole/JeanXXIII/Seconde/fcts_second_deg001.html

Toute fonction trinôme du second degré est représentée par une parabole dans un repère orthogonal du plan.

b) Caractéristiques de la représentation graphique :

- Si a > 0, la parabole est orientée vers le haut $\cup$: f est d'abord décroissante ,puis ensuite croissante.
- Si a < 0, la parabole est orientée vers le bas $\cap$: f est d'abord croissante ,puis ensuite décroissante.
- Quelles que soient les valeurs de a, b et c, les paraboles tracées ont toutes un axe de symétrie qui est parallèle à l'axe des ordonnées du repère.
- Si on note S le sommet de la parabole, et (α,β) les coordonnées de ce point, alors : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Exemple :

$f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ avec a = - 3, b = 5 et c = - 2

* a < 0, donc la parabole (P) représentant f est orientée vers le haut

* Si on note S le sommet de (P), S a pour coordonnées (α,β)

avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2\times(-3)} = \frac{5}{6}$ et $\beta = f(\alpha) = -3(\frac{5}{6})^2 + 5\text{x}(\frac{5}{6}) - 2$

$= -3\text{x}\frac{25}{36} + \frac{25}{6} - 2$

$= -\frac{25}{12} + \frac{50}{12} - \frac{24}{12} = \frac{1}{12}$

Donc : $S(\frac{5}{6} ; \frac{1}{12})$

3) Variations :

Exemple : On en déduit les variations de la fonction f précédente

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$

4) Forme canonique :

Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$). Notons (P) la parabole représentant f.

Si on note (α , β) les coordonnées du sommet de (P), alors $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

Cette écriture est unique pour une f donnée et s'appelle **la forme canonique de f**

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ (avec a = 2, b = -5 et c = 7)

On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$ et $\beta = f(\frac{5}{4}) = 2(\frac{5}{4})^2 - 5 \times \frac{5}{4} + 7 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 7$

$= \frac{25}{8} - \frac{50}{8} + \frac{56}{8} = \frac{31}{8}$

$$\boxed{\text{D'où : } f(x) = 2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{31}{8}}$$

C'est la forme canonique de f