Seconde A	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Vecteurs et calcul littéral*	Fait le lundi 11 mars 2024

Exercice 1 : (Calcul littéral) (Sur votre copie)

Les questions suivantes sont indépendantes.

Justifier soigneusement chaque résultat :

1) Développer et réduire l'expression suivante :

   $A(x) = (3x + 1)^2 – (2x – 5)^2$

$A(x) = (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2 - \left((2x)^2 - 2\times 2x\times 5 + 5^2\right)$

$= 9x^2 + 6x + 1 - (4x^2 - 20x + 25)$

$= 9x^2 + 6x + 1 - 4x^2 + 20x - 25$

$= 5x^2 + 26x - 24$

2) Factoriser l'expression suivante :

   $B(x) = (2x – 9)(x + 6) – (x + 6)^2$

$B(x) = (x+6)\left(2x - 9 - (x+6)\right)$

$= (x+6)(2x - 9 - x - 6)$

$= (x+6)(x-15)$

3) Résoudre l'équation suivante :

   $(9x + 1)^2 = 0$

$(9x+1)^2 = 0$ équivaut à $9x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{9x}{9} = -\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{9}$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{9}\right\}$

4) Mettre l'expression suivante sur le même dénominateur et la réduire :

   $C = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2}$

Tout d'abord, il y a deux valeurs interdites :

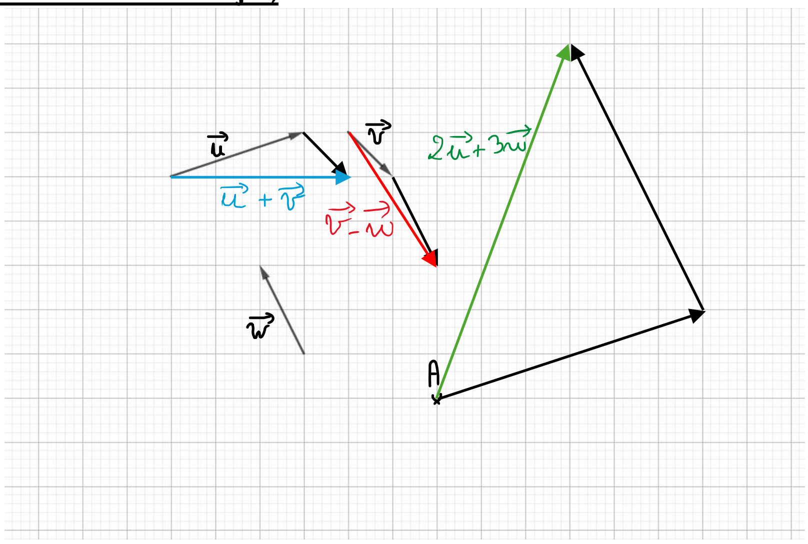
$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ | $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

On va donc se placer dans $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; -2\}$

$C = \frac{2\times(x+2)}{(x+1)(x+2)} - \frac{3(x+1)}{(x+2)(x+1)}$

$= \frac{2x + 4 - 3x - 3}{(x+1)(x+2)} = \frac{-x+1}{(x+1)(x+2)}$

Exercice 2 : (Directement sur le sujet)



1) Représenter $\vec{u}+\vec{v}$ (en bleu)
2) Représenter $\vec{v}-\vec{w}$ (en rouge)
3) Tracer le représentant du vecteur $2\vec{u}+3\vec{w}$ d'origine A (en vert)

Exercice 3 : (Directement sur le sujet)

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points suivants :

A(-1 ;2) , B(1 ;1) et C(7 ;-2)

1) Calculer les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix}$ d'où : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7-(-1) \\ -2-2 \end{pmatrix}$ d'où : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$

$= 2\times(-4)-(-1)\times 8$

$= -8+8 = 0$

3) Que peut-on dire des points A, B et C ? Justifier

Comme $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$, alors : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires avec un point en commun

Donc : Les points A, B et C sont alignés

4) Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

D'après 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ On a : $4\times x_{\overrightarrow{AB}} = 4\times 2 = 8 = x_{\overrightarrow{AC}}$

et $4\times y_{\overrightarrow{AB}} = 4\times(-1) = -4 = y_{\overrightarrow{AC}}$

Donc : $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$

5) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En déduire celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$

On a : $AB = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

or, d'après 4), $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$, d'où : $AC = 4 \times AB = 4\sqrt{5}$

6) On considère le point D tel que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

a) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

de même : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

d'où : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

Alors : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

$= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$= \cancel{-\overrightarrow{AB}} \cancel{+\overrightarrow{AB}} + 3\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

b) Calculer les coordonnées du point D

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, d'où : $3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$

or, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - (-1) \\ y_D - 2 \end{pmatrix}$

or, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ et deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées

Donc : $\begin{cases} 24 = x_D + 1 \\ -12 = y_D - 2 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} x_D = 24 - 1 = 23 \\ y_D = -12 + 2 = -10 \end{cases}$

Par conséquent : D a pour coordonnées $(23 ; -10)$