

Seconde G	<u>Corrigé du devoir de</u> <u>mathématiques :</u> Vecteurs	Fait le mardi 07 mars 2023
-----------	---	----------------------------

Exercice 1:

On considère les cinq points suivants dans un repère du plan :

A(-2 ; 4), B(2 ; -1), C(5 ; 3), D(-3 ; 13) et E(-6 ; 9)

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 5 \\ 13 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2) Calculer le déterminant de ces deux vecteurs

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 4 \times 10 - (-5) \times (-8) = 40 - 40 = 0$$

3) Que peut-on alors dire des droites (AB) et (CD) ? Justifier

comme $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
d'où : $(AB) \parallel (CD)$

4) Montrer que les points A, B et E sont alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - (-2) \\ 9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d'où $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
avec un point en commun
donc A, E et B sont alignés

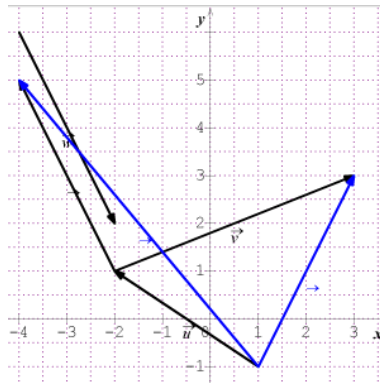
Exercice 2 :

Réduire au maximum l'expression du vecteur $\vec{u}$ suivant en justifiant :

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CD} \\ &= 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + 3\overrightarrow{CD} \\ &= 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CD} \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= 3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = 3\overrightarrow{AD} \quad (\text{relation de Chasles}) \end{aligned}$$

Exercice 3 :



- 1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ par lecture graphique

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- 2) Tracer le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ directement sur le sujet
3) Tracer le vecteur $\vec{u} - \vec{w}$ directement sur le sujet

Exercice 4 :

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les trois points suivants :

$$R(-2;3), S(-4;7) \text{ et } T(0;9)$$

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{ST}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} & \begin{pmatrix} x_S - x_R \\ y_S - y_R \end{pmatrix} & \overrightarrow{RT} & \begin{pmatrix} x_T - x_R \\ y_T - y_R \end{pmatrix} & \overrightarrow{ST} & \begin{pmatrix} x_T - x_S \\ y_T - y_S \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -4 - (-2) \\ 7 - 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 9 - 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ 9 - 7 \end{pmatrix} \\ \text{d'où: } \overrightarrow{RS} & \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{d'où: } \overrightarrow{RT} & \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} & \text{d'où: } \overrightarrow{ST} & \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 2) En déduire le calcul des normes de ces trois vecteurs. Que peut-on en déduire concernant la nature précise du triangle RST ? Justifier.

$$\text{norme de } \overrightarrow{RS} : RS = \sqrt{x_{\overrightarrow{RS}}^2 + y_{\overrightarrow{RS}}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$\text{norme de } \overrightarrow{RT} : RT = \sqrt{x_{\overrightarrow{RT}}^2 + y_{\overrightarrow{RT}}^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$\text{norme de } \overrightarrow{ST} : ST = \sqrt{x_{\overrightarrow{ST}}^2 + y_{\overrightarrow{ST}}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

- $ST = RS$, d'où RST est un triangle isocèle en S
- $RT^2 = 40$ et $RS^2 + ST^2 = 20 + 20 = 40$ } d'où : $RT^2 = RS^2 + ST^2$
D'après la réciproque du Théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S

3) Montrer que si on considère le point $U(2;5)$, alors RSTU est un parallélogramme.

On sait que $\vec{RS} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ on a : $\vec{UT} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $T(0; 9)$

d'où : $\vec{RS} = \vec{UT}$, donc RSTU est un parallélogramme

4) Quelle est alors la nature précise du parallélogramme RSTU ? Justifier.

RSTU est un parallélogramme.

RST est un triangle rectangle et isocèle en S

} d'où RSTU possède un angle droit et deux côtés consécutifs égaux.

Donc : RSTU est un carré

Exercice 5 : BONUS

Soient trois points A, B et C non alignés du plan.

On considère les points M et N définis par la relation : $\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{BC}$

1) Exprimer $\vec{MN}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC} \\ \text{donc : } \vec{MN} &= -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \end{aligned}$$

2) On sait que le point P est défini par la relation : $\vec{MP} = 2\vec{AB} - 2\vec{AC}$
Montrer que les points M, N et P sont alignés.

$$\begin{aligned} \vec{MP} &= 2\vec{AB} - 2\vec{AC} \\ \text{or, } \vec{MN} &= -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \quad (\text{d'après 1}) \\ \text{on a : } -\frac{1}{3}\vec{MP} &= -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \vec{MN} \\ \text{d'où : } \vec{MN} \text{ et } \vec{MP} &\text{ sont colinéaires avec un point en commun} \\ \text{Donc : } M, N \text{ et } P &\text{ sont alignés} \end{aligned}$$