Seconde G	**Corrigé du devoir de mathématiques :** Chapitre I	Fait le mardi 11 octobre 2022

Exercice 1 :

1) En détaillant les étapes à chaque fois, écrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{\frac{3}{2} - 5}{\frac{3}{2} + 5} \qquad B = \frac{(-2)^3 \times (-2)^{-1}}{[(-2)^4]^3} \qquad C = \frac{441\,000}{47\,250} - \frac{11}{6}$$

$$A = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5\times2}{1\times2}}{\frac{3}{2} + \frac{5\times2}{1\times2}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{10}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{10}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{13}{2}} = -\frac{7}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{13} = -\frac{7}{13}$$

$$B = \frac{(-2)^{3+(-1)}}{(-2)^{4\times3}} = \frac{(-2)^2}{(-2)^{12}} = (-2)^{2-12} = (-2)^{-10} = \frac{1}{(-2)^{10}} = \frac{1}{1024}$$

441 000	2
220 500	2
110 250	2
55 125	3
18 375	3
6 125	5
1 225	5
245	5
49	7
7	7
1	

47 250	2
23 625	3
7 875	3
2 625	3
875	5
175	5
35	5
7	7
1	

d'où : $\frac{441\,000}{47\,250} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2}{2 \times 3^3 \times 5^3 \times 7} = \frac{2^2 \times 7}{3} = \frac{28}{3}$

D'où : $C = \frac{28}{3} - \frac{11}{6} = \frac{28\times2}{3\times2} - \frac{11}{6} = \frac{56}{6} - \frac{11}{6} = \frac{45}{6} = \frac{3\times15}{3\times2} = \frac{15}{2}$

Remarque : On pouvait simplifier par 10 tout de suite $\frac{441\,000}{47\,250} = \frac{44\,100}{4\,725}$

2) A quel ensemble le « plus petit » parmi ceux étudiés dans le cours appartient C ? Justifier.

comme $C = \frac{15}{2} = 7{,}5 \in \mathbb{D}$ (en effet : $7{,}5 = \frac{75}{10^1}$ avec $75 \in \mathbb{Z}$)

Exercice 2 :

Calculer et simplifier au maximum les nombres suivants :

$$D = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 \qquad E = (3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 \qquad F = (4\sqrt{3} + \sqrt{6})(4\sqrt{3} - \sqrt{6})$$

$D = (\sqrt{7})^2 + 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$= 7 + 2\sqrt{21} + 3$
$= 10 + 2\sqrt{21}$

$E = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
$= 9 \times 2 - 6\sqrt{10} + 5$
$= 23 - 6\sqrt{10}$

$F = (4\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2$
$= 16 \times 3 - 6$
$= 48 - 6$
$= 42$

Exercice 3 :

1) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers, avec b le plus petit possible :

$$G = 3\sqrt{18} - 5\sqrt{32} + 4\sqrt{98}$$

$G = 3\sqrt{9\times2} - 5\sqrt{16\times2} + 4\sqrt{49\times2}$

$= 3\sqrt{9}\times\sqrt{2} - 5\sqrt{16}\times\sqrt{2} + 4\sqrt{49}\times\sqrt{2}$

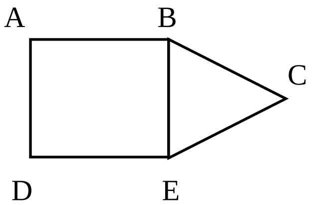
$= 3\times3\sqrt{2} - 5\times4\sqrt{2} + 4\times7\sqrt{2}$

$= 9\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 28\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}(9-20+28)$

$= 17\sqrt{2}$

2) On considère la figure suivante où ABED est un rectangle et BCE un triangle équilatéral :



a) Sachant que $AB = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{48}$ et que $AD = 30\sqrt{3}$, montrer soigneusement que ABED est en fait un carré

Pour commencer, ABED est un rectangle

$AB = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{48}$

$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3\times16}$

$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}\times\sqrt{16}$

$= 2\sqrt{3} + 7\times4\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 28\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}(2+28)$

$= 30\sqrt{3}$, or, $AD = 30\sqrt{3}$

D'où : AB = AD

ABED est un rectangle avec deux côtés consécutifs égaux

Donc : ABED est un carré

b) Calculer le périmètre du polygone ABCED en valeur exacte.

Périmètre (ABCED) = AB + BC + CE + ED + DA

$= 5\times AB = 5\times30\sqrt{3}$

$= 150\sqrt{3}$

c) Montrer que l'aire du carré ABED est un entier naturel.

Aire (ABED) $= AB^2 = (30\sqrt{3})^2$

$= 900\times3$

$= 2700$

Exercice 4 :

1) Développer et réduire les expressions suivantes :

$H = (2x + 3)^2$ $\quad\quad$ $I = (4x - 1)(-7x - 5)$

$H = (2x)^2 + 2\times2x\times3 + 3^2$

$= 4x^2 + 12x + 9$

$I = 4x\times(-7x) - 4x\times5 - 1\times(-7x) - 1\times(-5)$

$= -28x^2 - 20x + 7x + 5$

$= -28x^2 - 13x + 5$

2) Factoriser les expressions suivantes **au maximum** :

$J = (3x + 1)(5x - 2) - (x - 3)(3x + 1)$

$= (3x+1)(5x-2-(x-3))$

$= (3x+1)(5x-2-x+3)$

$= (3x+1)(4x+1)$

$K = 64x^2 - 81$

$K = (8x)^2 - 9^2$

$= (8x+9)(8x-9)$

$L = 9x^2 - 24x + 16$

$L = (3x)^2 - 2\times 3x \times 4 + 4^2$

$= (3x-4)^2$

Exercice 5 :

Résoudre les équations suivantes en détaillant les étapes :

1) $5x - 2 = -3x + 4$

$5x \cancel{-2} \cancel{+2} = -3x + 4 + 2$

$5x + 3x = -\cancel{3x} + \cancel{3x} + 6$

$\frac{8x}{8} = \frac{6}{8}$

$x = \frac{3\times 2}{2\times 4} = \frac{3}{4}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

2) $(-6x + 1)(4x - 5) = 0$

Un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul

$-6x+1=0$ ou $4x-5=0$

$-6x+\cancel{1}-\cancel{1}=0-1$ ou $4x-\cancel{5}+\cancel{5}=0+5$

$\frac{\cancel{-6}x}{\cancel{-6}} = \frac{-1}{-6}$ ou $\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{5}{4}$

$x = \frac{1}{6}$ ou $x = \frac{5}{4}$

Donc : $S = \left\{\frac{1}{6} ; \frac{5}{4}\right\}$

Exercice 6 :

Le Soleil a un rayon d'environ 700 000 km et une masse d'environ 2×10^{30} kg.

L'étoile Arcturus de la constellation du Bouvier a un diamètre approximatif de 29,4 millions de km.

1) Déterminer l'écriture scientifique du diamètre d'Arcturus en km

$29,4 \times 10^6 = 2,94\times10^1\times10^6$

$= 2,94\times10^7$ km (écriture scientifique)

2) Combien de Soleils comme le nôtre pourrait-on aligner sur le diamètre d'Arcturus pour aller d'un bord au bord opposé de cette étoile ? Arrondir à l'entier le plus proche.

Diamètre du Soleil $= 2\times 700\,000 = 1\,400\,000$ km

nbre de Soleils $= \frac{2,94\times10^7}{1,4\times10^6} = \frac{2,94}{1,4}\times 10 = 21$

On peut donc aligner 21 soleils comme le nôtre pour couvrir le diamètre d'Arcturus

3) Le trou noir central de notre Galaxie a une masse avoisinant les quatre millions de fois la masse du Soleil. Donner l'écriture scientifique de sa valeur approximative en kg.

$M_{TN} = 4\times10^6 \times 2\times10^{30}$

$= 8\times10^{36}$ kg

Exercice 7 : DEFI BONUS

Résoudre l'équation suivante en détaillant les étapes :

$$121x^2 - 1 - (22x + 2)(- 4x - 3) = 0$$

$121x^2 - 1 - (22x+2)(-4x-3) = 0$

$(11x)^2 - 1^2 - (22x+2)(-4x-3) = 0$

$(11x+1)(11x-1) - 2(11x+1)(-4x-3) = 0$

$(11x+1)(11x-1-2(-4x-3)) = 0$

$(11x+1)(11x-1+8x+6) = 0$

$(11x+1)(19x+5) = 0$

Un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul

$11x+1 = 0$ ou $19x+5 = 0$

$11x+\cancel{1}-\cancel{1} = 0-1$ ou $19x\cancel{+5}\cancel{-5} = 0-5$

$\frac{\cancel{11}x}{\cancel{11}} = -\frac{1}{11}$ ou $\frac{\cancel{19}x}{\cancel{19}} = \frac{-5}{19}$

$x = -\frac{1}{11}$ ou $x = -\frac{5}{19}$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{11} ; -\frac{5}{19}\right\}$