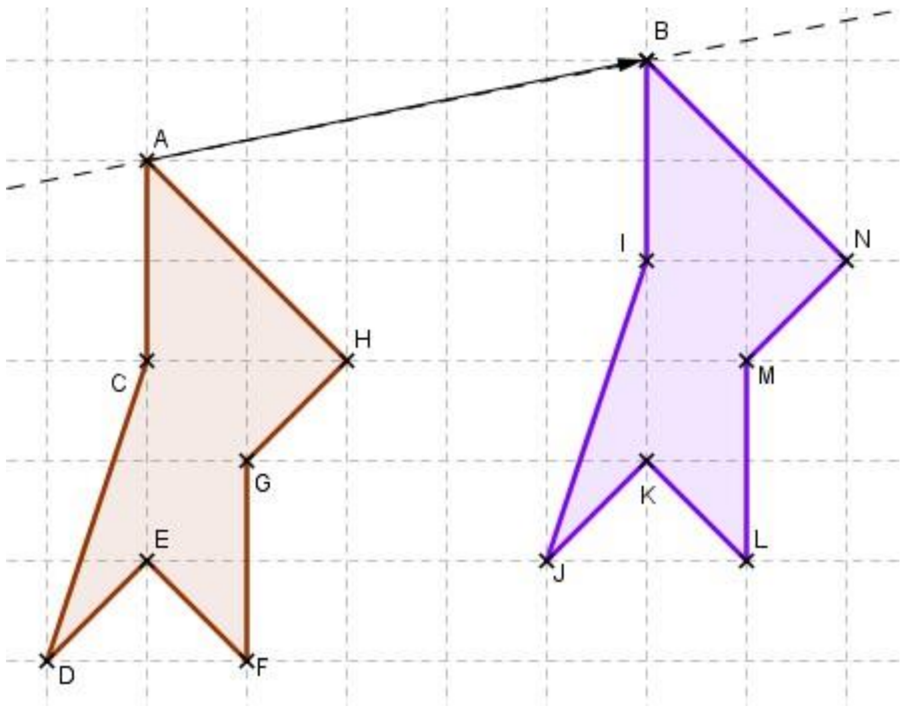
| Seconde G | **Les vecteurs** | Année scolaire 2020/2021 |
|---|---|---|




On fait glisser la figure F1 le long de la droite (AB), dans le sens de A vers B, de la longueur AB. On obtient la figure F2.

La transformation du plan qui permet de passer de la figure F1 à F2 est

appelée **……………………………………………………………..**

Elle est caractérisée par trois éléments :

- Sa…………….: celle de la droite (AB)
- Son ………….. : celui de A vers B
- Sa………………………….: la longueur AB

*Remarques :*

- On glisse la figure sans tourner
- Dans le langage courant, on a tendance à confondre direction et sens (ATTENTION)

Dans l'exemple précédent, l'image de C dans la translation qui transforme A en B est I, celle de H est N, celle de F est L, etc...

**Remarque importante :**

Les quadrilatères ABIC, ABNH, ABLF, etc... sont des …………………………..

La translation précédente est aussi appelée ……………………………….

2) Définition et notation :

Un vecteur est caractérisé par trois éléments :

- ……………………..
- ……………………..
- ……………………..

Le premier point est appelé ……………..du vecteur et l'autre son ……………………

Exemple : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$

- Sa direction : celle de la droite (AB)
- Son sens : de A vers B (d'où le sens de la flèche)

- Sa norme : la longueur AB

Origine : A et Extrémité : B

3) <u>Vecteurs égaux :</u>

Quand on regarde la figure précédente, on constate (entre autres) que la translation de vecteur $\overrightarrow{CI}$ transforme aussi la figure F1 en F2.

On va dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{CI}$ sont………………

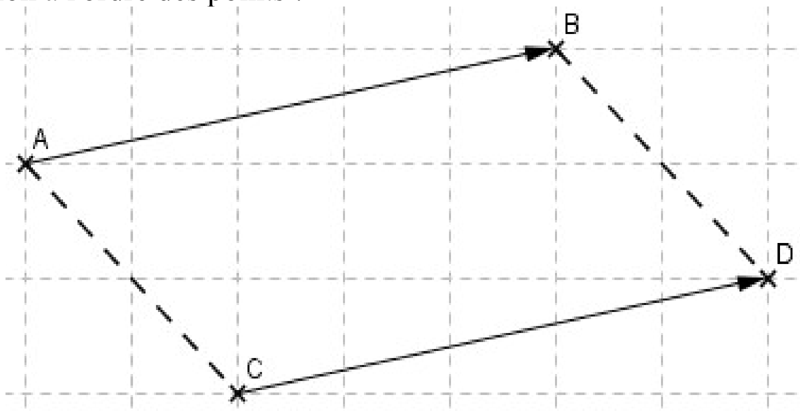
<u>a) Définition :</u>

*Deux vecteurs qui ont la même ……………., le même ………….et la même…………..sont dits* ***<u>égaux.</u>***

<u>b) Lien vecteurs égaux-parallélogrammes :</u>

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \text{ABDC est un ………………………}}$

<u>Remarque :</u> Attention à l'ordre des points !



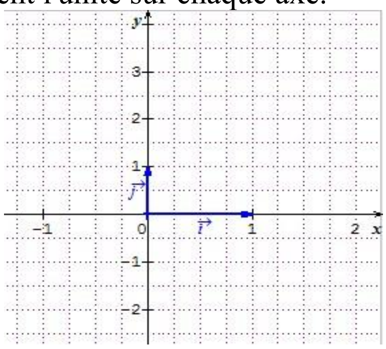

II) <u>Coordonnées d'un vecteur dans un repère :</u>

1) <u>Repère (O;$\vec{i}$,$\vec{j}$)</u>

Considérons un repère orthogonal d'origine O.

Le vecteur $\vec{i}$ va diriger l'axe des abscisses et le vecteur $\vec{j}$ celui des ordonnées.

Les normes de ces deux vecteurs donnent l'unité sur chaque axe.




<u>Remarque :</u> Dans la cas d'un repère orthonormé, la norme de $\vec{i}$= norme de $\vec{j}$

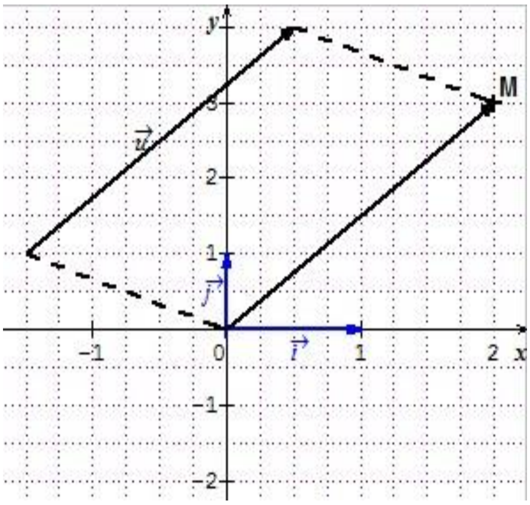
2) <u>Définition des coordonnées d'un vecteur :</u>

On se place dans (O;$\vec{i}$,$\vec{j}$), repère orthogonal du plan.

Soit $\vec{u}$un vecteur.

<u>Les coordonnées du vecteur</u> $\vec{u}$dans (O;$\vec{i}$,$\vec{j}$) sont celles du point M tel que $\vec{u}$= $\overrightarrow{OM}$

<u>Exemple :</u>




Dans cet exemple, M a pour coordonnées (…..;……..) donc $\vec{u}$ a pour coordonnées (……….;………..)

Le vecteur nul a pour coordonnées (…… ;………)

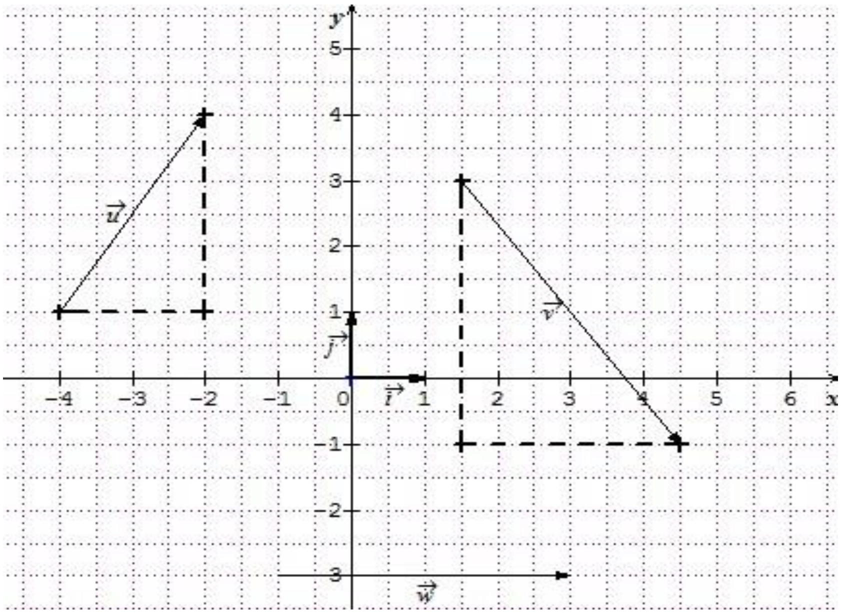
3) Notations :

Soit $\vec{u}$un vecteur de coordonnées (x ; y).

On note $\vec{u}$(x ; y)   et dans certains cas :  $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

4) Détermination graphique des coordonnées d'un vecteur :

Exemples :




a) Coordonnées de $\vec{u}$: - en abscisses : pour aller de l'origine à l'extrémité, on va vers la droite (= donc abscisse positive) de 2 unités (puisqu'on passe de -4 à -2)

D'où l'abscisse de $\vec{u}$est 2.

- En ordonnées : pour aller de l'origine à l'extrémité, on « monte » de 3 unités (puisqu'on part de 1 pour aller à 4). D'où : l'ordonnée de $\vec{u}$est 3

Par conséquent : $\vec{u}$(……… ; …….)

b) Coordonnées de $\vec{v}$ :

- Abscisse : …… unités vers la droite séparent l'origine de l'extrémité d'où l'abscisse de $\vec{v}$ est + …..
- Ordonnée : …….unités vers « le bas » séparent l'origine de l'extrémité d'où l'ordonnée de $\vec{v}$ est – ……

Par conséquent : $\vec{v}$(……… ;…………)

c) Coordonnées de $\vec{w}$ :

De manière évidente : $\vec{w}$(…… ;…..)

5) Egalité de vecteurs :

| Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$ …..= …… et …… = ……. |
|---|

**Remarque importante :**

*On dit que $\vec{u}$et $\vec{v}$ sont deux représentants d'un même vecteur.*

Pour représenter graphiquement un vecteur dont on connait les coordonnées, on place l'origine de ce vecteur où on veut.

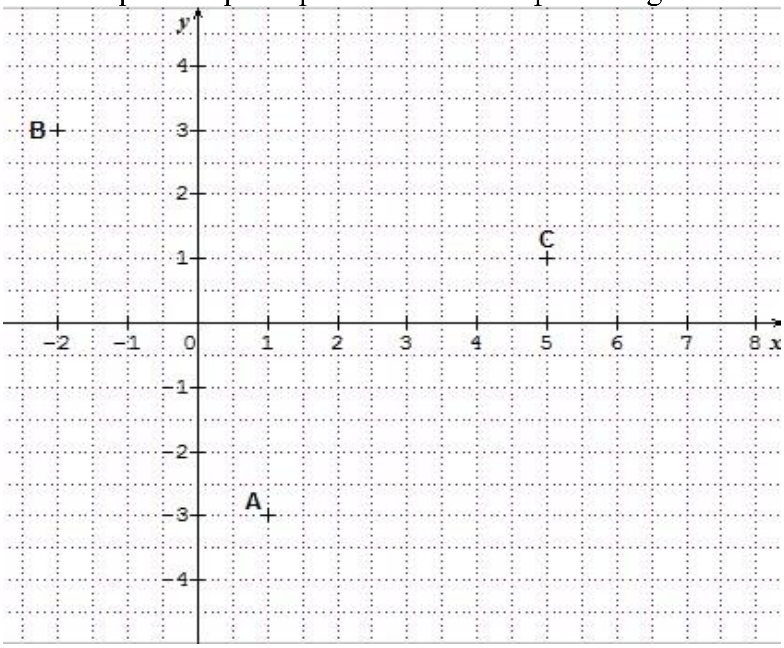
6) Coordonnées d'un vecteur en fonction des coordonnées de son origine et de son extrémité :

Soient A($x_A$ ; $y_A$) et B($x_B$ ; $y_B$). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$se calculent grâce aux formules suivantes :

| $\overrightarrow{AB}$(………..; ………..) |
|---|

Remarque : La démonstration est évidente en partant de la lecture graphique des coordonnées d'un vecteur vue dans le 4)

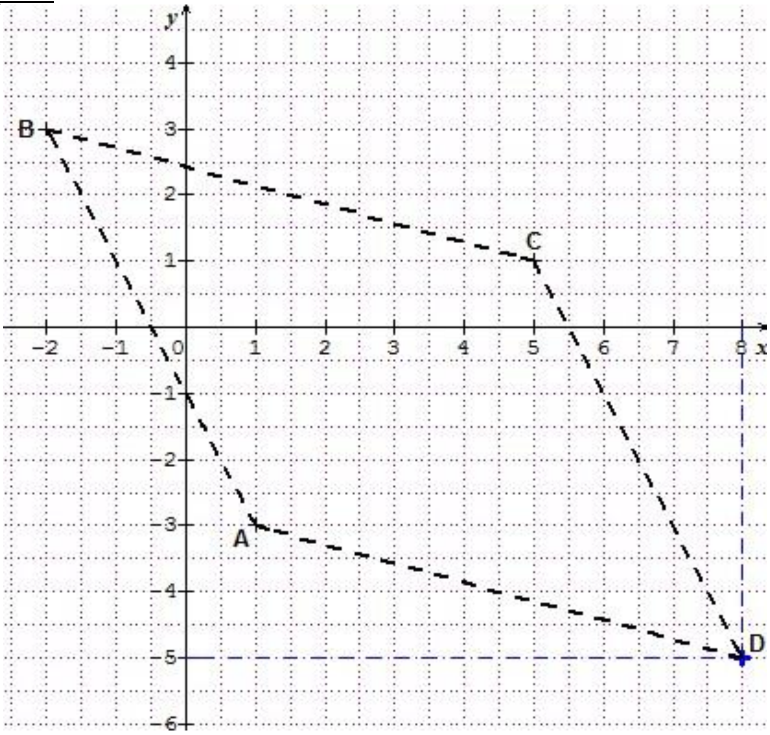
Exemple classique d'application :
On considère trois points A(1;-3) , B(-2;3) et C(5;1).
Calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.




Solution :

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

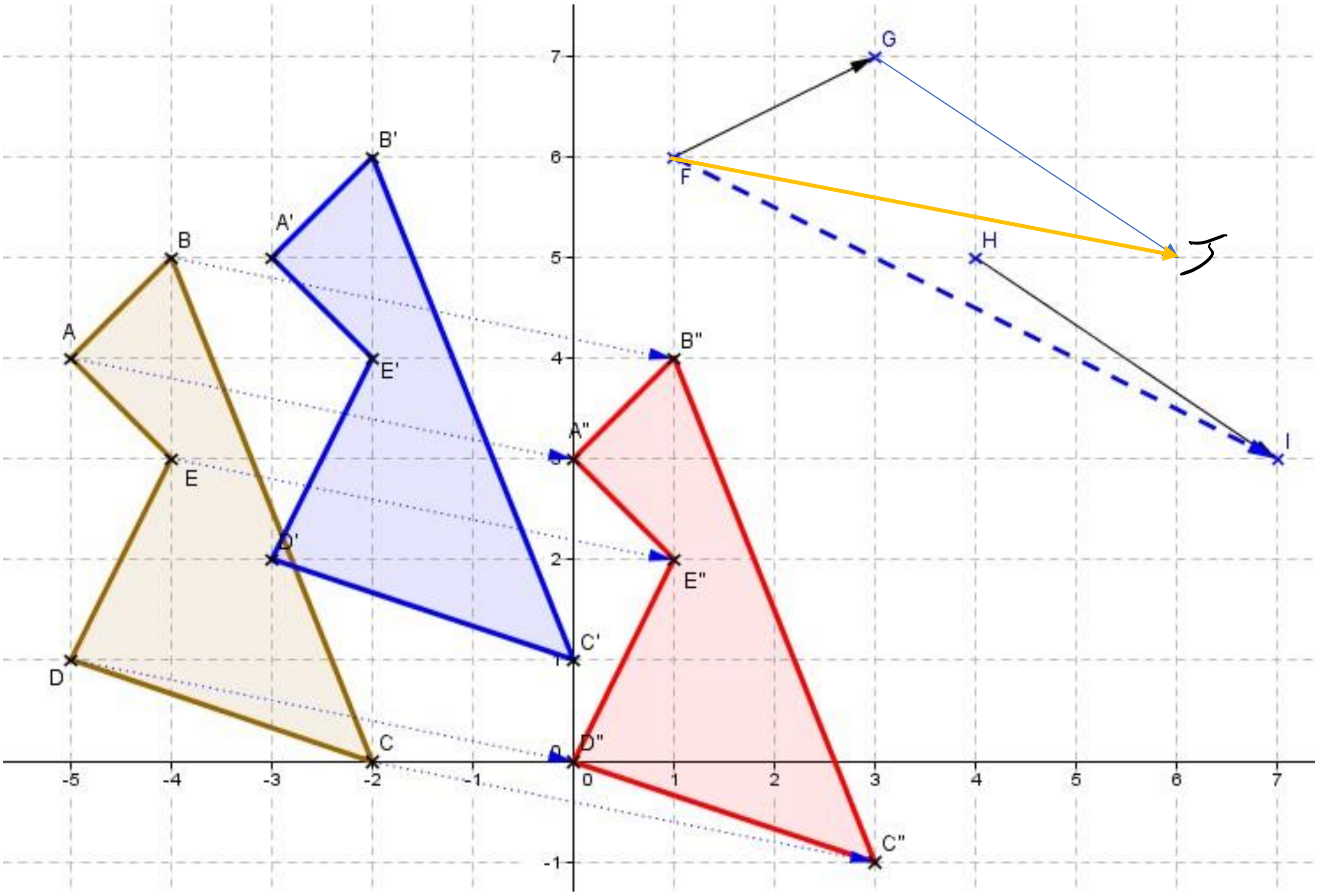
*Vérification graphique :*




III) Addition de vecteurs :

1) Définition du vecteur somme :

Activité de découverte :



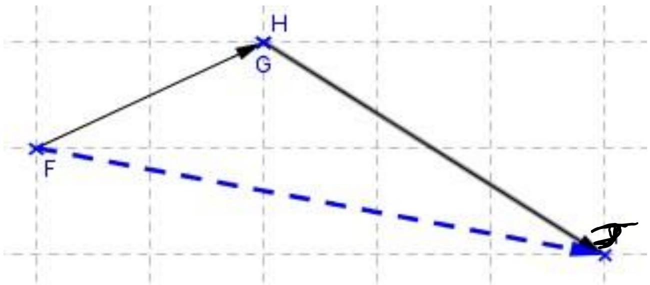

Le polygone ABCDE a pour image le polygone A'B'C'D'E' dans la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$

Le polygone A'B'C'D'E' a pour image le polygone A"B"C"D"E" dans la translation de vecteur $\overrightarrow{HI}$

On souhaite savoir quelle translation permet de passer de la figure en marron à celle en rouge.

On place $\overrightarrow{HI}$ au bout de $\overrightarrow{FG}$ (G et H seront confondus) et le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ sera le vecteur de translation qui permet de passer de la figure en marron à celle en rouge.

On dit que $\overrightarrow{FJ}$est le vecteur somme de $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HI}$




Comme G et H sont confondus, alors $\overrightarrow{FJ}$= $\overrightarrow{FG}$+ $\overrightarrow{GJ}$

2) <u>Relation de Chasles :</u>

Dans l'exemple précédent, on a vu que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ}$

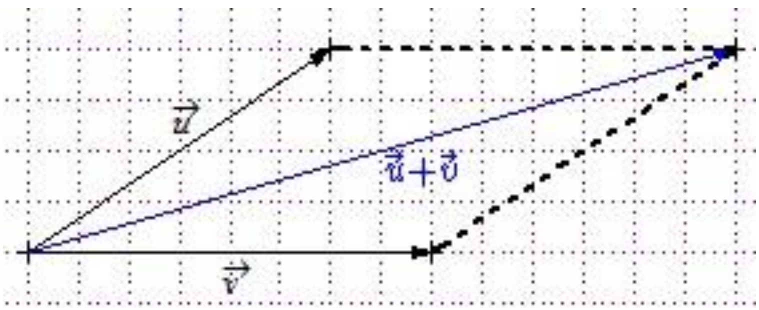
Même lettre

Ce type de relation s'appelle **<u>la relation de Chasles</u>** (du nom de Michel CHASLES (1793-1880) Mathématicien français)

<u>Exemples :</u>

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$= …….. , $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TG}$+ $\overrightarrow{GR}$=

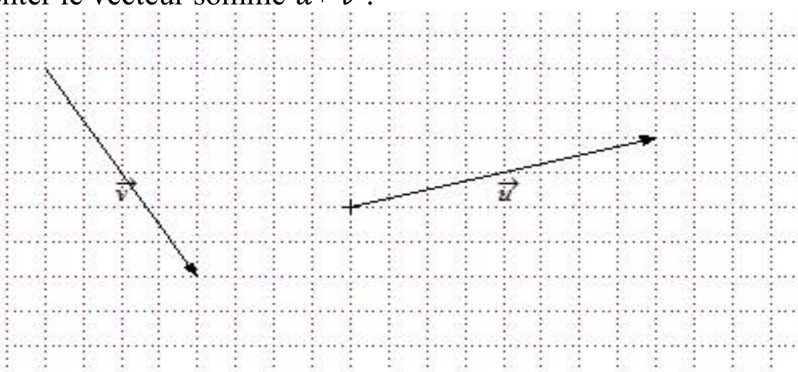
<u>a) Règle du parallélogramme :</u>



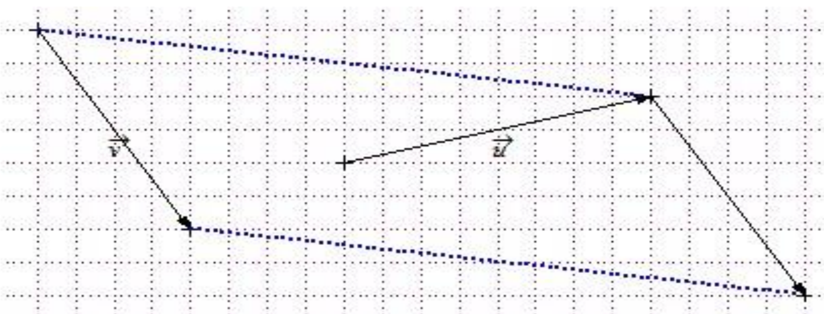

<u>Méthode :</u> Pour tracer le vecteur-somme de deux vecteurs, il suffit de les mettre « bout à bout »

<u>Exemple :</u>

On souhaite représenter le vecteur somme $\vec{u}$+ $\vec{v}$ :

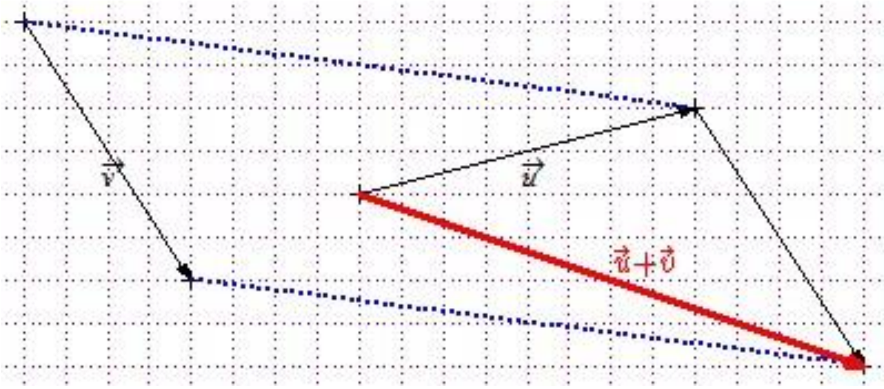



On va placer $\vec{v}$« au bout » de $\vec{u}$ :



Ensuite, le vecteur-somme est celui qui a pour origine celle de $\vec{u}$ et pour extrémité celle du vecteur tracé précédemment :

Le vecteur-somme est représenté en rouge :




Pour calculer le vecteur-somme de plusieurs vecteurs on les considère deux par deux.

b) Vecteurs opposés :

Soit $\vec{u}$ un vecteur, - $\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction, la même norme mais pas le même sens que le vecteur $\vec{u}$

On dit que $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs opposés.

On a $\vec{u}+ (- \vec{u}) = ...$

Le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BA}$

Remarque : D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+ \overrightarrow{BA}=$ …….= ...

c) Soustraction de vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On peut définir la différence $\vec{u}-\vec{v}$ par :

$\boxed{\vec{u}-\vec{v}= \dots\dots\dots\dots\dots\dots}$

Exemple :

On souhaite tracer la différence $\vec{u}-\vec{v}$ :


Le vecteur différence est représenté en rouge.

3) Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$:

| Soients $\vec{u}$(x ; y) et $\vec{v}$(x' ; y') alors $\vec{u}+\vec{v}$(………..; …………..) |
|---|

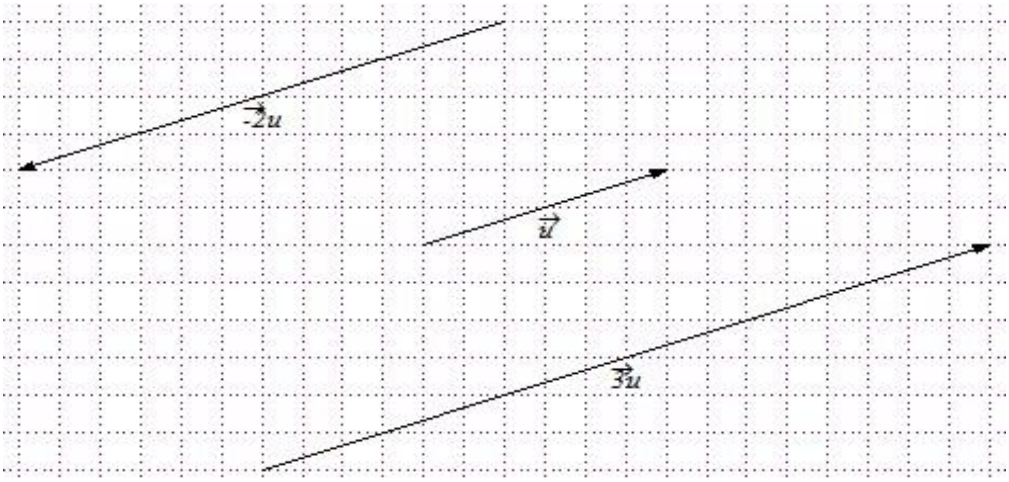
IV) Multiplication d'un vecteur par un réel. Colinéarité :

1) Multiplication :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x;y) et λ un nombre réel, on définit le vecteur $\lambda\vec{u}$ comme étant le vecteur de coordonnées (……. ;……..)

- Si $\lambda > 0$, $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ auront le même ……… et la norme de $\lambda\vec{u}$ = ………………
- Si $\lambda < 0$, $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ auront des ………………… et la norme de $\lambda\vec{u}$ = …………………

Exemples :




On a représenté un vecteur $\vec{u}$, puis $-2\vec{u}$ et $3\vec{u}$
- Le vecteur $3\vec{u}$ a bien une norme égale à ……. fois celle de $\vec{u}$
- Le vecteur $-2\vec{u}$ a bien une norme égale à ……. fois celle de $\vec{u}$

Cas particulier :
Si $\lambda = 0$, alors $\lambda\vec{u}$ = ……………

2) Règles de calculs :

On considère u et v, deux vecteurs et $\lambda_1$ et $\lambda_2$ deux nombres réels.
On admet les résultats suivants :

$\lambda_1 (\vec{u} + \vec{v})$ = ……………………
$(\lambda_1 + \lambda_2)\,\vec{u}$= ……………………..
$\lambda_1(\lambda_2\,\vec{u})$ = ………………………

Exemples :
a) $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ =
b) $5\,\overrightarrow{AB} - 7\,\overrightarrow{AB} + 2(3\overrightarrow{AB})$ =

3) Colinéarité :

a) Définition :
Deux vecteurs ayant la même direction sont dits colinéaires
Caractérisation :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ………………………………………..

Exemple :
Soit $\vec{u}(5;-2)$ et $\vec{v}(-10;4)$
On a ……… … … … … … … … … ..Donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) Droites parallèles :
Soient (AB) et (CD) deux droites.
On a l'équivalence suivante :

(AB) // (CD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ……………………….

c) Points alignés :
On considère trois points A, B et C distincts. On a l'équivalence suivante :

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ……………………

Exemple :
A(2;3) , B(- 1;5) et C(8; -1)
Montrons que A, B et C sont alignés.

4) Déterminant de deux vecteurs :

a) Définition :

Soient $\vec{u}$(x ;y) et $\vec{v}$(x' ;y') , deux vecteurs du plan.
Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u};\vec{v})$ est le résultat de : xy' – x'y

On le note également $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ = $xy' - x'y$ (on fait les produits « en croisant »)

Exemple : Calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}(3;-1)$ et $\vec{v}(-4;5)$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ = 3×5 – (-1)×(-4)
= 15 – 4 = **11**

b) Lien déterminant / Colinéarité :

$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v}) = 0}$

Exemple :

Sachant que A(2 ;-5), B(5 ;-3), C(1 ;$\frac{1}{3}$) et E(-1 ;-1)

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires en calculant leur déterminant.

$\overrightarrow{AB}(5-2;-3+5)$ d'où : $\overrightarrow{AB}(3;2)$
$\overrightarrow{CE}\left(-1-1;-1-\frac{1}{3}\right)$ d'où : $\overrightarrow{CE}\left(-2;-\frac{4}{3}\right)$
Donc : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 3\times\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\times(-2) = -4 + 4 = 0$

Donc : **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires**