Seconde	***Découverte de quatre fonctions particulières :*** **La fonction carré, la fonction cube, la fonction racine carrée et la fonction inverse**	Année scolaire 2019/2020

I) **Fonction carré :**

1) Définition :

La fonction carré est la fonction définie sur ℝ par f(x) =………………

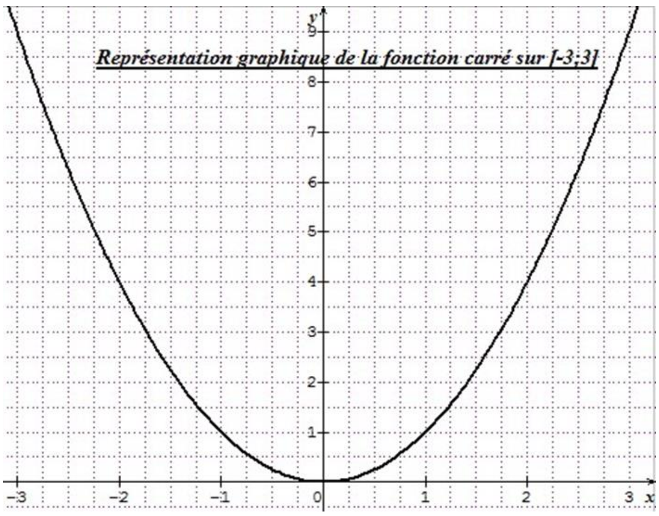
2) Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									

3) Parité :

4) Variations :

5) Courbe représentative :

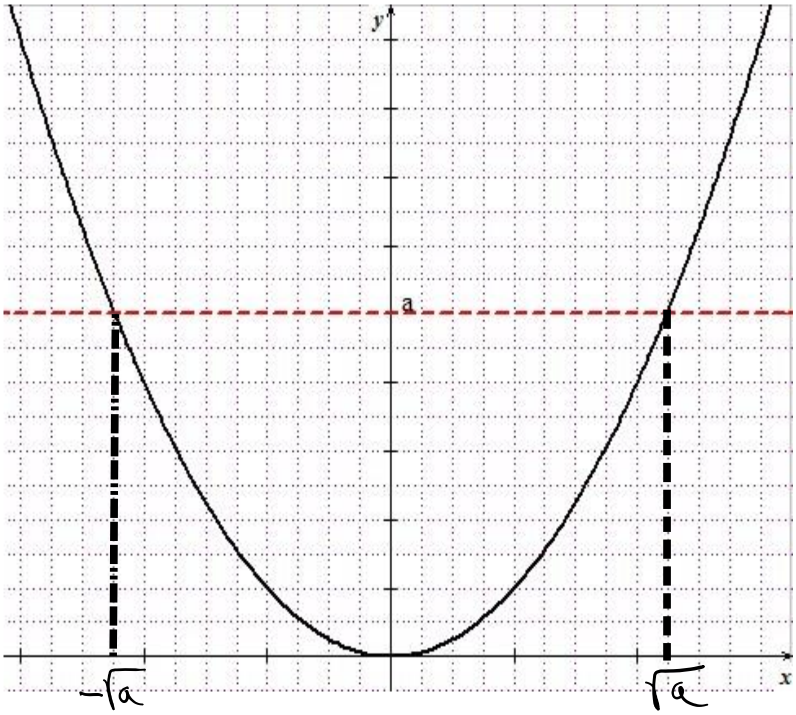


La courbe ainsi tracée est une……………………..

6) Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction carré :

a) Equations du type $x^2 = a$:

Pour résoudre graphiquement l'équation $x^2 = a$, on trace la droite horizontale à l'ordonnée a et la parabole représentant la fonction carré.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite :
- Si $a > 0$:



Cette équation a deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$

$$\boxed{S = \{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\}}$$

- Si $a = 0$, la droite horizontale est l'axe des abscisses.
Il n'y a qu'un seul point d'intersection avec la parabole : l'origine du repère.
Donc l'équation $x^2 = a$ n'a qu'une seule solution **S = {0}**

- Si $a < 0$, la droite horizontale ne coupe pas la parabole.
Donc l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle : **S = ∅**

Exemples :

1) Résoudre $9x^2 = 4$

D'où : $x^2 = \frac{4}{9} > 0$ d'où l'équation admet deux solutions

$S = \{-\sqrt{\frac{4}{9}}\ ;\ \sqrt{\frac{4}{9}}\}$ C'est-à-dire : $S = \{-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\}$

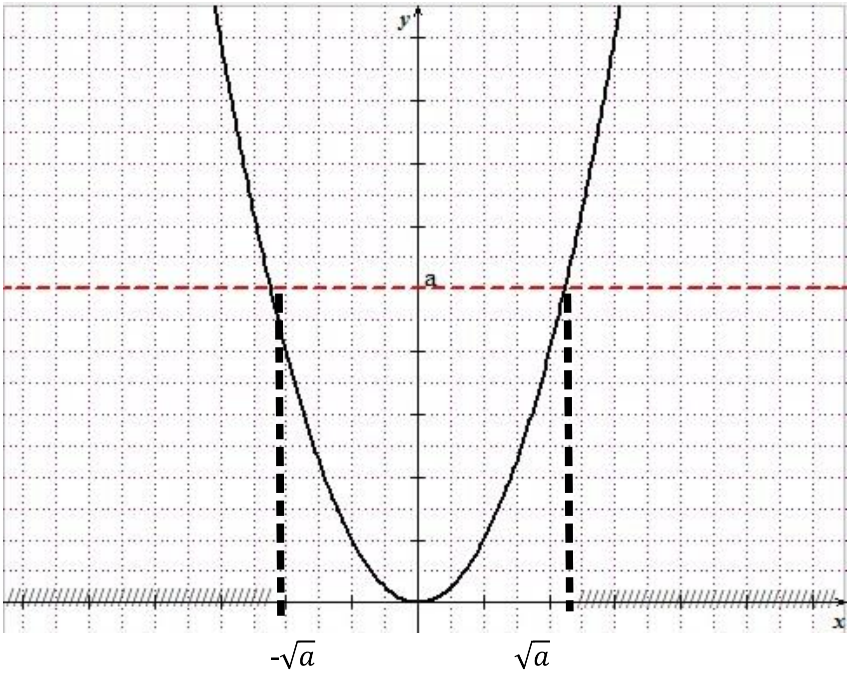
2) Résoudre $5x^2 + 1 = 0$

$5x^2 = -1$ d'où : $x^2 = -\frac{1}{5} < 0$ donc l'équation n'a aucune solution réelle **S = ∅**

b) Inéquations du type $x^2 > a$ (ou $x^2 < a$)

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 > a$, on trace la parabole représentant la fonction carré et la droite horizontale à l'ordonnée a. Les solutions sont les abscisses de tous les points de la parabole situés au-dessus de la droite.

- Cas où $a > 0$:



Les solutions de $x^2 > a$ sont données par :

$$S =]-\infty;-\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a};+\infty[$$

<u>Remarque :</u>
Si l'inégalité est large $x^2 \geq a$, il suffit de fermer les crochets aux bornes finies :

$$S =]-\infty;-\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a};+\infty[$$

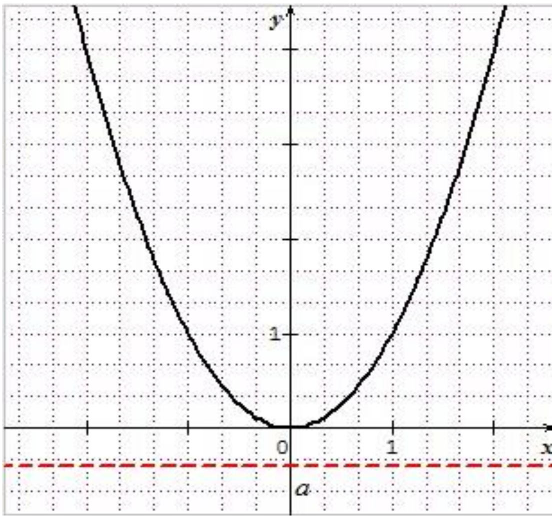
* L'inéquation $x^2 < a$ admet pour solutions : $S =]-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}[$
* L'inéquation $x^2 \leq a$ admet pour solutions : $S = [-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}]$

<u>- Cas où a = 0 :</u>

* L'inéquation $x^2 > a$ admet pour solutions : $\underline{S = \mathbb{R}\backslash\{0\}}$
* L'inéquation $x^2 \geq a$ admet pour solutions : $\underline{S = \mathbb{R}}$
* L'inéquation $x^2 < a$ n'admet aucune solution réelle : $\underline{S = \emptyset}$
* L'inéquation $x^2 \leq a$ admet une seule solution : $\underline{S = \{0\}}$

<u>- Cas où a < 0 :</u>

Dans ce cas, la droite horizontale à l'ordonnée a ne coupe pas du tout la parabole représentant la fonction carré.



* L'inéquation $x^2 > a$ admet pour solutions $S = \mathbb{R}$

* L'inéquation $x^2 \geq a$ admet pour solutions $S = \mathbb{R}$

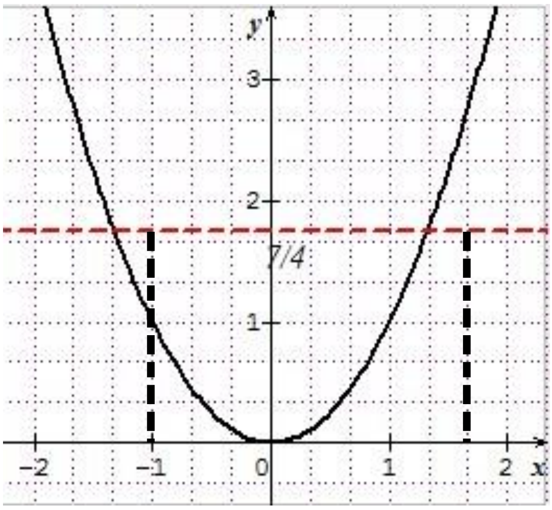
* L'inéquation $x^2 < a$ n'admet aucune solution réelle : $S = \emptyset$

* L'inéquation $x^2 \leq a$ n'admet aucune solution réelle : $S = \emptyset$

Exemple :

Résoudre l'inéquation suivante : $4x^2 - 5 \geq 2$

On a $4x^2 \geq 7$ d'où : $x^2 \geq \frac{7}{4}$ avec $\frac{7}{4} > 0$



$-\sqrt{\frac{7}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc les solutions de l'inéquation sont :

$$\boxed{S =]-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{7}}{2}; +\infty[}$$

Remarque :

Algébriquement, on pouvait résoudre l'inéquation précédente :

En effet, $4x^2 \geq 7 \Leftrightarrow 4x^2 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (\sqrt{7})^2 \geq 0$

On utilise l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(2x)^2 - (\sqrt{7})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x + \sqrt{7})(2x - \sqrt{7}) \geq 0$

Ensuite, on va faire un tableau de signes :

$2x + \sqrt{7} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\qquad$ $2x - \sqrt{7} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{7}}{2}$		$\frac{\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x + \sqrt{7}$		-	0	+		+	
Signe de $2x - \sqrt{7}$		-		-	0	+	
Signe du produit		+	0	-	0	+	

On retrouve $S =]-\infty ; -\frac{\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{7}}{2} ; +\infty[$

<u>Application : Encadrement de x^2 le plus fin possible</u>

On considère $x \in [a;b]$ et on souhaite encadrer x^2 le plus finement possible.

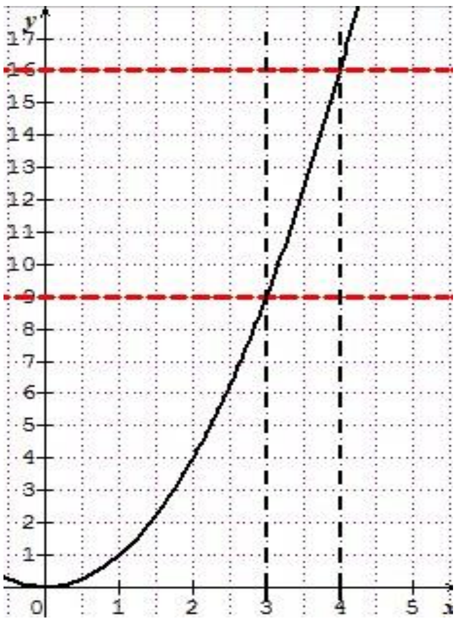
Trois cas sont à envisager :

<u>a) Les bornes qui encadrent x sont toutes les deux positives :</u>

Si $x \in [a;b]$, alors $x^2 \in [a^2;b^2]$

<u>Exemple :</u>

Si $3 \leq x < 4$



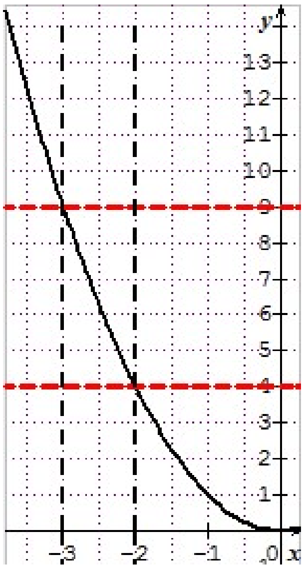
alors : <u>$9 \leq x^2 < 16$</u>

<u>b) Les bornes qui encadrent x sont toutes les deux négatives :</u>

Si $x \in [a;b]$, alors $x^2 \in [b^2;a^2]$

Exemple :

Si $-3 \leq x \leq -2$

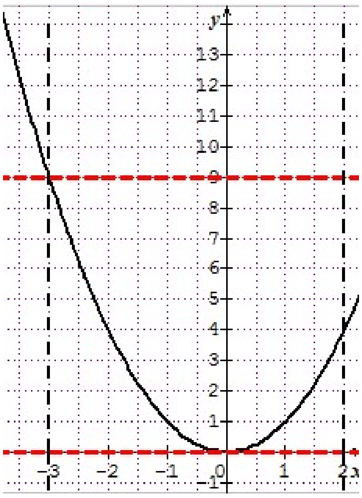


alors $\underline{4 \leq x^2 \leq 9}$

c) Les bornes qui encadrent x sont de signes différents :

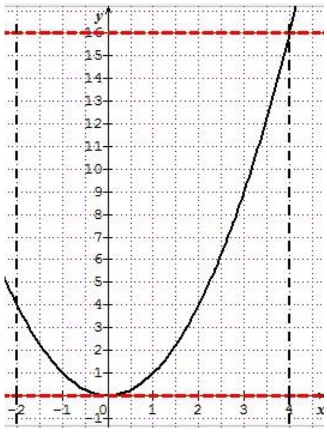
Exemples :

- Si $x \in [-3;2]$:



alors $x^2 \in [0;9]$

- Si $x \in [-2;4]$



alors $\underline{0 \leq x^2 \leq 16}$

II) La fonction cube :

1) Définition :

La fonction cube est la fonction définie sur ℝ par f(x) =………………………

2) Tableau de valeurs et représentation graphique :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

Parité :

Pour tout x ϵℝ, f(-x) = ……………….. . On dit que f est une fonction……………..

Conséquence graphique : La courbe représentative de f est symétrique par rapport…………

Courbe de f sur [-3 ;3] :

3) Variations :
La fonction cube est strictement…………………………… sur ℝ

4) Résolution d'équations du type $x^3 = k$, où $k \in \mathbb{R}$:

D'après la représentation graphique de la fonction cube, pour tout k réel, il existe un unique x réel tel que $x^3 = k$. Cet x est appelé ……………………….. de k.

5) Utilisation de Python :

```
def f(x) :
    return x**3
```

Pour obtenir un tableau de valeurs de la fonction cube sur [-3 ;3] avec des valeurs de x avec un pas de 0.5 :

```
def f(x):
    return x**3
x=-3
print(x,f(x))
for i in range(12):
    x = x + 0.5
    print(x,f(x))
```

Avec une liste :

```
def f(x):
    return x**3
x=-3
L=[]
for i in range(12):
    L.append(f(x))
    x=x+0.5
print(L)
```

III) <u>La fonction racine carrée :</u>

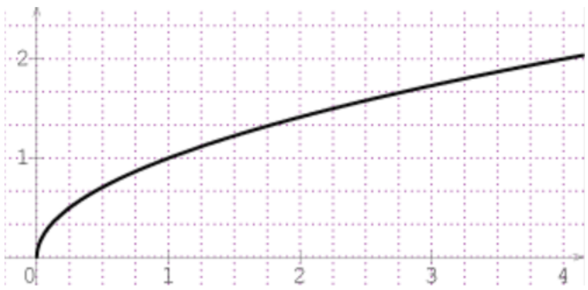
1) <u>Définition :</u>

<u>La fonction racine carrée</u> est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par f(x) =…………..

2) <u>Tableau de valeurs et représentation graphique</u> :

x	0	0.5	1	1.5	2	3	4
f(x)							

Courbe de la fonction racine carrée sur [0 ;4] :



3) Variations :

La fonction racine carrée est strictement…………………… sur $\mathbb{R}^+$

4) Utilisation de Python :

ATTENTION : pour utiliser la racine carrée en Python, il faut au préalable la charger à partir du module math par : **from math import sqrt**

Exemple pour obtenir un tableau de valeurs de la fonction carrée sur [0 ;4] avec des valeurs de x ayant un pas de 0.2 :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(x)
x=0
print(x,f(x))
while x<=4:
    x = x + 0.2
    print(x,f(x))
```

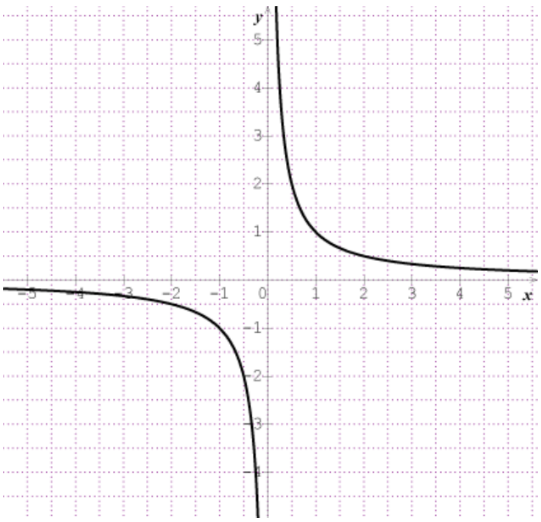
IV) La fonction inverse :

1) Définition :

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$par f(x) =……………………..

2) Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
f(x)										



Courbe représentative de la fonction inverse sur [-5 ;5]\{0}

Cette courbe s’appelle une……………………..

Remarque :

La courbe de la fonction inverse est en deux parties disjointes. Chaque branche approche les axes mais sans les atteindre.

3) Variations :

La fonction inverse est……………………………………………………………………………

ATTENTION :

………………………………………………………………………………………………………

4) Python :

```
def f(x) :
  return 1/x
```

Exemple : Pour obtenir un tableau de valeurs de la fonction inverse sur [-30 ;30] \ {0} avec des valeurs de x ayant un pas de 1 :

```
def f(x):
    return 1/x
x=-30
print(x,f(x))
while x<30:
    x=x+1
    if x==0:
        print("Pas définie en 0")
    else:
        print(x,f(x))
```

Pour les résolutions d’équations et d’inéquations à partir des courbes représentatives des fonctions usuelles, voir les exercices.