

Exercice 1 :

$$\text{Soit } A = \frac{\frac{2}{3} - 1 + \frac{5}{2}}{\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{2}}$$

- 1) Calculer A et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible en détaillant les calculs.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{\frac{2}{3} - 1 + \frac{5}{2}}{3 \times 2}}{\frac{\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{2}}{3 \times 2}} = \frac{\frac{4}{6} - \frac{6}{6} + \frac{15}{6}}{\frac{4}{6} + \frac{6}{6} - \frac{15}{6}} \\ &= \frac{\frac{4 - 6 + 15}{6}}{\frac{4 + 6 - 15}{6}} = \frac{\frac{13}{6}}{-\frac{5}{6}} = \frac{13}{6} \times \left(-\frac{6}{5}\right) = \boxed{-\frac{13}{5}} \end{aligned}$$

- 2) Quel est le plus petit ensemble auquel appartient A ? Justifier.

Comme $-\frac{13}{5} = -2,6$, $\boxed{A \in \mathbb{D}}$ (en effet: $-2,6 = -\frac{26}{10}$ avec $-26 \in \mathbb{Z}$)

Exercice 2 : (Directement sur le sujet)

- 1) Montrer soigneusement que le carré d'un nombre pair est pair :

Soit x , un entier pair, alors $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$
 D'où $x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, d'où x^2 est un entier pair

- 2) a) Décomposer les nombres 8 400 et 3960 en produits de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 8400 & 2 \\ 4200 & 2 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 8400 \\ 4200 \\ 2100 \\ 1050 \\ 525 \\ 175 \\ 35 \\ 7 \\ 1 \end{array}} \right\} = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 3960 \\ 1980 \\ 990 \\ 495 \\ 165 \\ 55 \\ 11 \\ 1 \end{array}} \right\} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

- b) En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{8400}{3960}$

$$\begin{aligned} \frac{8400}{3960} &= \frac{2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11} \\ &= \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 11} = \boxed{\frac{70}{33}} \text{ fraction irréductible} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Compléter le tableau suivant dans lequel une croix indique que le nombre appartient à l'ensemble correspondant et justifier les réponses en dessous :

Nombres	N	Z	D	Q	R
a) 42,2567			X	X	X
b) $\frac{15}{5\sqrt{3}}$					X
c) $\frac{1}{3}$				X	X
d) $(3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})$		X	X	X	X
e) 3π					X
f) $7\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2) - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 14)$	X	X	X	X	X

$$a) 42,2567 = \frac{422567}{10^4} \quad \text{avec } 422567 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ et } 4 \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } 42,2567 \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$b) \frac{15}{5\sqrt{3}} = \frac{3 \times 3}{3 \times \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \quad (\text{en fait } \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

c'est un irrationnel.

$$c) \frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \text{ (voir cours)} \quad (\text{raisonnement par l'absurde})$$

or, $1 \in \mathbb{N}$ et $3 \in \mathbb{N}$, d'où $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$d) (3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3}) = 3^2 - (2\sqrt{3})^2$$
$$= 9 - 4 \times 3$$
$$= 9 - 12$$
$$= -3 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$e) \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \text{ d'où } 3\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$f) 7\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2) - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 14) = 7 \times 5 - 14\sqrt{5} - 5 + 14\sqrt{5}$$
$$= 35 - 5$$
$$= 30 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$