Secondes	**Corrigé du DM (Equations/Inéquations avec inconnue au dénominateur)**	Rendu le 27/04/2020

Exercice 1 :

a) $\dfrac{4x+3}{5x-1} = 0$

valeur interdite : $5x-1=0$
$\iff 5x = 1$
$\iff x = \dfrac{1}{5}$

on va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

$\dfrac{4x+3}{5x-1} = 0 \iff 4x+3=0$ (car si $B \neq 0$, $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$)
$\iff 4x = -3$
$\iff x = -\dfrac{3}{4}$ et $-\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{5}$

Donc : $S = \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+2} = 0$

Valeur(s) interdite(s) : $x^2+2=0 \iff x^2 = -2$ impossible dans $\mathbb{R}$ (un carré est toujours positif)

on va résoudre dans $\mathbb{R}$

$\dfrac{x-1}{x^2+2} = 0 \iff x-1=0$ (car si $B \neq 0$, $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$)
$\iff x = 1$

Donc $S = \{1\}$

c) $\dfrac{7}{x-3} = 8$

Valeur interdite : $x-3=0 \iff x=3$

On va résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\dfrac{7}{x-3} - 8 = 0$

$\iff \dfrac{7-8(x-3)}{x-3} = 0$

$\iff \dfrac{7-8x+24}{x-3} = 0 \iff \dfrac{-8x+31}{x-3} = 0$

$\Leftrightarrow -8x+31=0$ (car si $B\neq 0$, $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$)

$\Leftrightarrow -8x=-31$

$\Leftrightarrow x=\frac{31}{8}\neq 3$

Donc : $S=\left\{\frac{31}{8}\right\}$

d) $\frac{9x}{3x+2}=-\frac{1}{3}$ Valeur interdite : $3x+2=0$

$\Leftrightarrow 3x=-2$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

On va résoudre sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$\frac{9x}{3x+2}+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{3\times 9x+1\times(3x+2)}{3(3x+2)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{27x+3x+2}{3(3x+2)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{30x+2}{3(3x+2)}=0$

$\Leftrightarrow 30x+2=0$ (si $B\neq 0$, $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$)

$\Leftrightarrow 30x=-2$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{30}=-\frac{1}{15}\neq -\frac{2}{3}$

Donc $S=\left\{-\frac{1}{15}\right\}$

e) $\frac{16x^2-9}{4x+3}=0$ Valeur interdite : $4x+3=0$

$\Leftrightarrow 4x=-3$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$

On va résoudre sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

Or : $16x^2-9=(4x+3)(4x-3)$

d'où : $\frac{16x^2-9}{4x+3}=4x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\neq -\frac{3}{4}$

Donc $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

f) $\dfrac{2x+3}{5x-1} = \dfrac{4x-7}{10x+2}$

Valeurs interdites : $5x-1=0 \iff x = \dfrac{1}{5}$

$10x+2=0 \iff 10x = -2 \iff x = -\dfrac{2}{10}$

$\iff x = -\dfrac{1}{5}$

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{5} ; \dfrac{1}{5}\right\}$

$\dfrac{2x+3}{5x-1} - \dfrac{4x-7}{10x+2} = 0$

$\iff \dfrac{(2x+3)(10x+2)-(4x-7)(5x-1)}{(5x-1)(10x+2)} = 0$

$\iff \dfrac{\cancel{20x^2}+34x+6-\cancel{20x^2}+39x-7}{(5x-1)(10x+2)} = 0$

$\iff \dfrac{73x-1}{(5x-1)(10x+2)} = 0$

$\iff 73x-1=0$ (car si $B \neq 0$, $\dfrac{A}{B}=0 \iff A=0$)

$\iff x = \dfrac{1}{73} \neq -\dfrac{1}{5}$

$\neq \dfrac{1}{5}$ donc $S = \left\{\dfrac{1}{73}\right\}$

Exercice 2 :

a) $\dfrac{x-3}{x+2} > 0$ Valeur interdite : $x+2=0 \iff x=-2$

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x-3 \geq 0 \iff x \geq 3$

$x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de $x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\dfrac{x-3}{x+2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc :

$S =]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$

b) $\dfrac{7-4x}{2x+5} \leq 0$ Valeur interdite : $2x+5=0$

$\iff 2x=-5$

$\iff x=-\dfrac{5}{2}$

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

$7-4x \geq 0 \iff -4x \geq -7 \iff x \leq \dfrac{7}{4}$

$2x+5 \geq 0 \iff 2x \geq -5 \iff x \geq -\dfrac{5}{2}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
Signe de $7-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $2x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\dfrac{7-4x}{2x+5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc :

$S = \left]-\infty ; -\dfrac{5}{2}\right[\cup \left[\dfrac{7}{4} ; +\infty\right[$

c) $\dfrac{x^2}{2x^2+3} < 0$ $x^2 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

d'où $2x^2+3 \geq 3 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

On peut résoudre sur $\mathbb{R}$

Or, $x^2 \geq 0$ et $2x^2+3>0$ d'où $\dfrac{x^2}{2x^2+3} \geq 0$

Donc cette inéquation n'a pas de solution

$S = \emptyset$

d) $\dfrac{9x}{2x-3} - 7 \geq 0$ Valeur interdite : $2x-3=0$

$\iff 2x=3$

$\iff x=\dfrac{3}{2}$

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

$\dfrac{9x}{2x-3} - \dfrac{7(2x-3)}{2x-3} \geq 0$

$\iff \dfrac{9x-14x+21}{2x-3} \geq 0 \iff \dfrac{-5x+21}{2x-3} \geq 0$

$-5x+21 \geq 0 \iff -5x \geq -21 \iff x \leq \dfrac{21}{5}$

$2x-3 \geq 0 \iff 2x \geq 3 \iff x \geq \dfrac{3}{2}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{21}{5}$		$+\infty$
signe de $-5x+21$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{-5x+21}{2x-3}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc :

$S = \left]\frac{3}{2} ; \frac{21}{5}\right]$

e) $\frac{x}{x-1} \geqslant 9$

Valeur interdite : $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

(⚠ erreur d'énoncé)

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{x}{x-1} - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x - 9(x-1)}{x-1} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x+9}{x-1} \geqslant 0$$

$-8x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow -8x \geqslant -9 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{9}{8}$

$x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

x	$-\infty$		1		$\frac{9}{8}$		$+\infty$
Signe de $-8x+9$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{-8x+9}{x-1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left]1 ; \frac{9}{8}\right]$

f) $\dfrac{8x+1}{x^2-1} < 0$

Valeurs interdites :

$x^2 - 1 = 0$

$\iff (x+1)(x-1) = 0$

$\iff x+1 = 0$ ou $x-1=0$

$\iff x = -1$ ou $x = 1$

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$:

$8x+1 \geqslant 0 \iff 8x \geqslant -1 \iff x \geqslant -\frac{1}{8}$

$x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$

$x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{8}$		1		$+\infty$
signe de $8x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{8x+1}{x^2-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc : $S =]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{8} ; 1[$