

Exercice 1) $f(x) = 5x^2 - 9x - 2$

1) $(5x+1)(x-2) = 5x^2 - 10x + x - 2$
 $= 5x^2 - 9x - 2 = f(x)$ ①

2) Erreur d'énoncé $\triangle$:

En fait $5(x - \frac{9}{10})^2 - \frac{281}{100}$ doit être remplacé par $5(x - \frac{9}{10})^2 - \frac{121}{20}$

$5(x - \frac{9}{10})^2 - \frac{121}{20} = 5(x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{81}{100}) - \frac{121}{20}$ ①
 $= 5x^2 - 9x + \frac{81}{20} - \frac{121}{20}$
 $= 5x^2 - 9x - \frac{40}{20} = 5x^2 - 9x - 2 = f(x)$

$\triangle$ Dans la suite, on prendra quand même $5(x - \frac{9}{10})^2 - \frac{281}{100}$ comme forme canonique pour f . (En seconde, les méthodes de détermination de cette forme canonique étant hors programme)

3) a) $f(x) = -2 \Leftrightarrow 5x^2 - 9x - 2 = -2$
 $\Leftrightarrow 5x^2 - 9x = 0$
 $\Leftrightarrow x(5x - 9) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 5x - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{9}{5}$ } $S = \{0; \frac{9}{5}\}$

b) $f(\frac{9}{10}) = 5(\frac{9}{10} - \frac{9}{10})^2 - \frac{281}{100} = \boxed{-\frac{281}{100}}$ ①

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (5x+1)(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow 5x+1=0 \text{ ou } x-2=0$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \text{ ou } x = 2$ } $-\frac{1}{5}$ et 2 sont les deux antécédents de 0 par f . ①

d) $f(x) = \frac{119}{100} \Leftrightarrow 5(x - \frac{9}{10})^2 - \frac{281}{100} = \frac{119}{100}$

$$\Leftrightarrow 5\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{400}{100} = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(x - \frac{9}{10} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \quad (A^2 - B^2 = (A+B)(A-B))$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \text{ ou } x - \frac{9}{10} + \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{10} + \frac{4\sqrt{5}}{10} \text{ ou } x = \frac{9}{10} - \frac{4\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{9+4\sqrt{5}}{10} ; \frac{9-4\sqrt{5}}{10} \right\}$$

$$c) (5x+1)(x-2) \geq 0$$

$$5x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$$

$$x-2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2$$

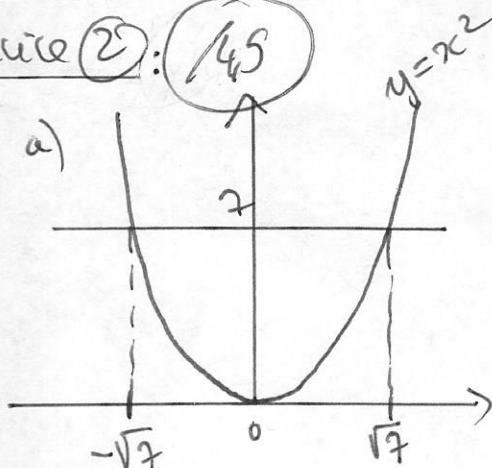
Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
signe de $5x+1$	-	0	+	+
signe de $x-2$	-	-	0	+
signe de $(5x+1)(x-2)$	+	0	-	+

Donc :

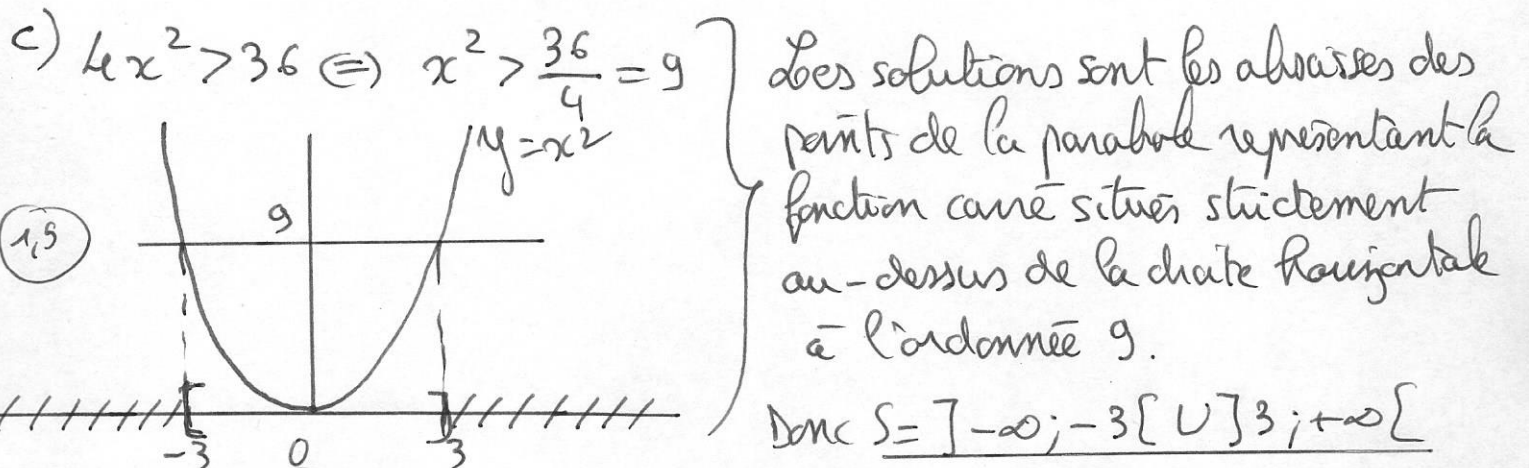
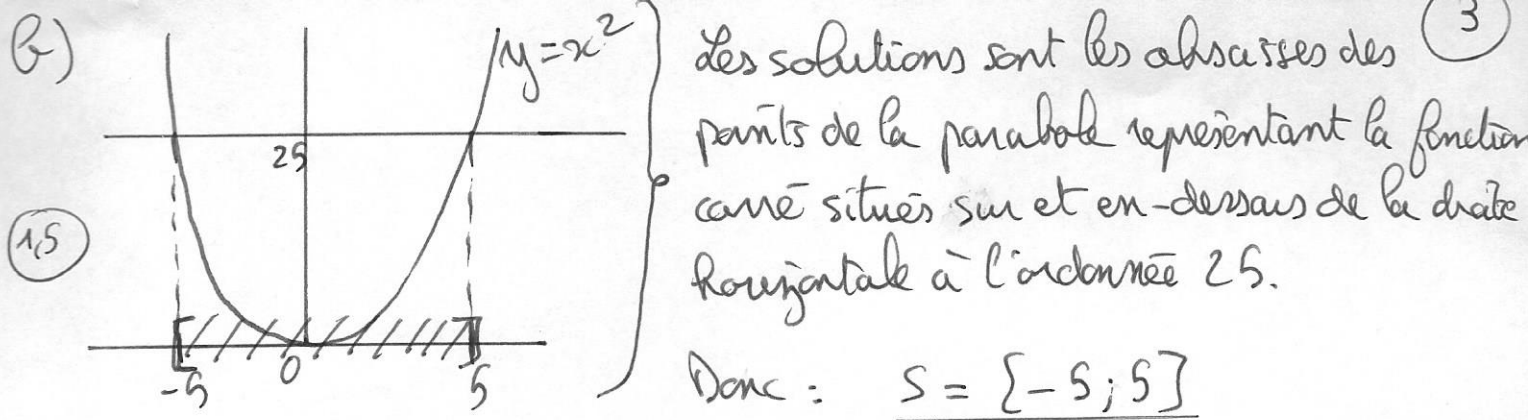
$$S = \left] -\infty ; -\frac{1}{5} \right] \cup [2 ; +\infty [$$

Exercice (2) : 1,5



Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la parabole représentant la fonction carré avec la droite horizontale à l'ordonnée 7.

$$\text{Donc } S = \left\{ -\sqrt{7} ; \sqrt{7} \right\}$$

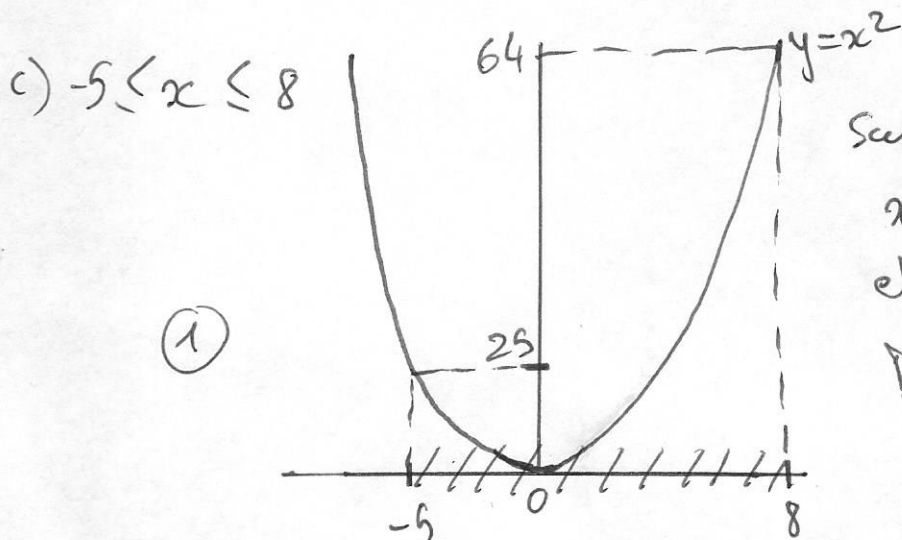


Exercice (3): 

a) $2 \leq x \leq 11$, or $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
 d'où $2^2 \leq x^2 \leq 11^2$ c'est-à-dire: $4 \leq x^2 \leq 121$
 (Encadrement le plus fin possible pour x^2).

b) $-3 \leq x \leq -1$, or $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$

d'où $(-1)^2 \leq x^2 \leq (-3)^2$, c'est-à-dire: $1 \leq x^2 \leq 9$ (Encadrement le plus fin possible pour x^2)



Sur $[-5; 8]$, le minimum de $x \mapsto x^2$ est 0 (atteint en $x = 0$)
 et le maximum est 64 (atteint en $x = 8$)

Donc:

$0 \leq x^2 \leq 64$
 (Encadrement le plus fin possible pour x^2)

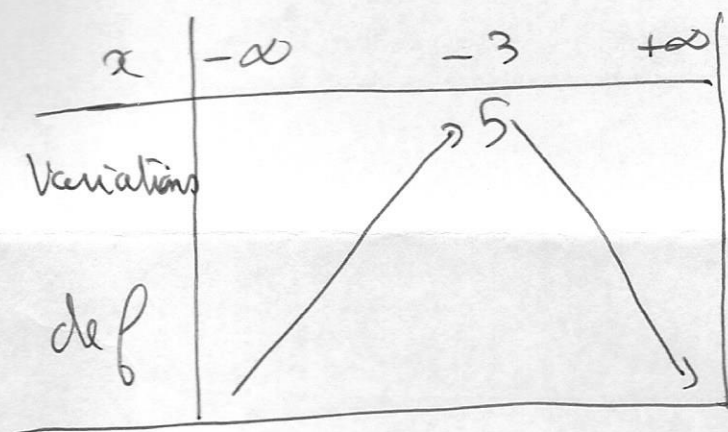
Exercice (4): $f(x) = 5 - (x+3)^2$

1) $f(x) = -(x+3)^2 + 5$ (Forme canonique de f).

or, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $(\alpha; \beta)$ sont les coordonnées du sommet S de la parabole représentant f . (1)

Par identification: $\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 5 \end{cases}$, donc S a pour coordonnées $(-3; 5)$

2) On a également $a = -1 < 0$, d'où f est d'abord croissante, puis décroissante. On a le tableau de variations de f :



3) Compte-tenu des variations de f obtenues dans la question 2), 5 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = -3$ (0,5)

Lola a donc tort.

Exercice (5): $\frac{1}{3}$

$f(x) = -(x+2)^2 + 3$: c'est la forme canonique de f
 Par identification, $\begin{cases} a = -1 < 0, \text{ d'où la parabole représentant } f \text{ est orientée vers le bas} \\ \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$ Les coordonnées de son sommet sont $(-2; 3)$

La seule parabole qui correspond est P_3 (0,75)
 Donc P_3 représente f

$g(x) = x^2 - 4x + 7$, $a = 1 > 0$: d'où la parabole représentant g est orientée vers le haut. (5)

c'est P_1 ou P_2 .

On a $g(0) = 7$, d'où la parabole cherchée doit passer par le point de coordonnées $(0; 7)$ = c'est la parabole P_2

Donc P_2 représente g

(0,75)

$$h(x) = (-x+3)(x-1)$$

$$= -x^2 + x + 3x - 3$$

$$= -x^2 + 4x - 3$$

$a = -1 < 0$: d'où la parabole représentant h est orientée vers le bas

Or, a ne peut pas être P_3 - Donc : P_4 représente h

(0,75)

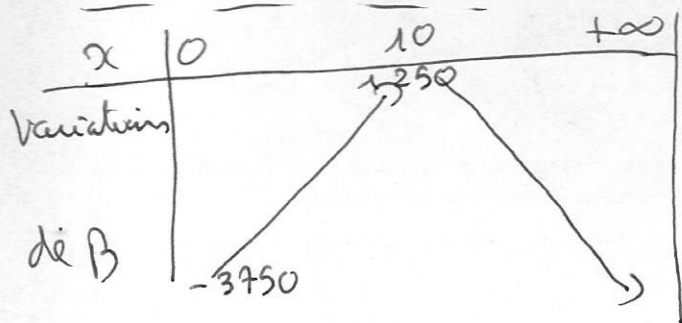
Par conséquent : P_1 représente i

(0,75)

Exercice (6): Bonus $B(x) = -50x^2 + 1000x - 3750$

1) En utilisant la calculatrice:

$a = -50 < 0$, d'où B est croissante, puis décroissante



$$\begin{aligned} B(10) &= -50 \times 100 + 1000 \times 10 - 3750 \\ &= -5000 + 10000 - 3750 \\ &= 1250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad -50(x-5)(x-15) &= -50(x^2 - 15x - 5x + 75) \\ &= -50x^2 - 50x(-20)x - 50 \times 75 \\ &= -50x^2 + 1000x - 3750 = \underline{\underline{B(x)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad B(x) = 0 &\Leftrightarrow -50(x-5)(x-15) = 0 \Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } x-15=0 \\ &\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=15 \end{aligned}$$

Pour avoir un bénéfice nul, l'artisan doit produire 5 ou 15 pièces en 1 mois

4)

$$B(x) > 0 \Leftrightarrow -50(x-5)(x-15) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-15) < 0$$

(6)

x	0	5	15	$+\infty$	
Signe de $x-5$	-	0	+	+	
Signe de $x-15$	-	-	0	+	
Signe de $(x-5)(x-15)$	+	0	-	0	+

$$x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

$$x-15 > 0 \Leftrightarrow x > 15$$

Pour avoir un bénéfice positif, il faut vendre entre 5 et 15 pièces par mois

ou plus de 15

5) D'après les variations de B obtenues dans la question 1, le bénéfice maximum est de 1250 € obtenu pour la vente de 10 pièces.