

Seconde (2)

Corrigé du Devoir de mathématiques
(Calculs algébriques / Second degré
Coordonnées / Configurations du plan)

①
(Fait le 24/03/21)

Exercice (1):

$$f(x) = (x-5)(x+1) + x^2 - 6x(x+6) - 86$$

$$1) f(x) = x^2 + x - 5x - 5 + x^2 - 6x^2 - 36x - 86 \\ = -4x^2 - 40x - 91$$

2)

$$(2x+13)(-2x-7) = -4x^2 - 14x - 26x - 91 \\ = -4x^2 - 40x - 91 = f(x) \text{ (d'après 1)}$$

Donc: $f(x) = (2x+13)(-2x-7)$

$$3) -4(x+5)^2 + 9 = -4(x^2 + 10x + 25) + 9 \\ = -4x^2 - 40x - 100 + 9 \\ = -4x^2 - 40x - 91 = f(x) \text{ (d'après 1)}$$

Donc:

$$f(x) = -4(x+5)^2 + 9$$

4)

$$a) f\left(-\frac{7}{2}\right) = (2 \times (-\frac{7}{2}) + 13) \underbrace{(-2 \times (-\frac{7}{2}) - 7)}_{=0} \\ = (-7 + 13) \times 0$$

Donc $f\left(-\frac{7}{2}\right) = \boxed{0}$

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+13)(-2x-7) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x+13=0 \text{ ou } -2x-7=0 \\ \Leftrightarrow 2x=-13 \text{ ou } -2x=7 \\ \Leftrightarrow x=-\frac{13}{2} \text{ ou } x=-\frac{7}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{13}{2}; -\frac{7}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} c) f(x) = 9 &\Leftrightarrow -4(x+5)^2 + 9 = 9 \\ &\Leftrightarrow -4(x+5)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -5 \end{aligned}$$

$$S = \{-5\}$$

$$5) (2x+13)(-2x-7) > 0$$

$$2x+13 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -13$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{2}$$

$$-2x-7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq 7$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{2}$$

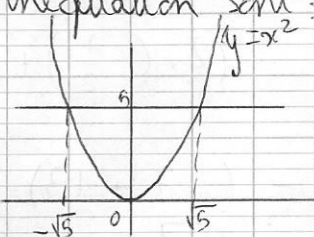
Tableau de signes:

x	$-\infty$	$-\frac{13}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x+13$	-	0	+	+
Signe de $-2x-7$	+	+	0	-
Signe de $(2x+13)(-2x-7)$	-	0	+	-

Les solutions de l'inéquation sont: $S =]-\frac{13}{2}; -\frac{7}{2}[$

Exercice 2):

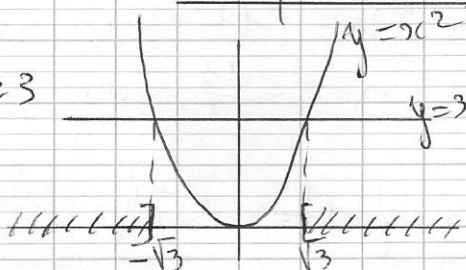
$$1) a) x^2 = 5$$



Les solutions sont les abscisses des points d'intersection entre la parabole représentant la fonction carré et la droite horizontale d'équation $y = 5$

Donc: $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

$$b) x^2 \geq 3$$



Les solutions sont les abscisses des points de la parabole représentant la fonction carré situés au-dessus de la droite d'équation $y = 3$.

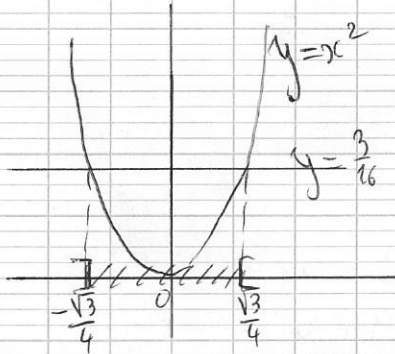
Donc $S =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$

e)

$$15x^2 - 2 < -x^2 + 1 \Leftrightarrow 15x^2 + x^2 < 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{3}{16}$$



Les solutions sont les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction carré situés strictement en-dessous de la droite horizontale d'équation $y = \frac{3}{16}$.

Donc $S =]-\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}[$

2) a) $x \in [7; 10]$

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction carré est strictement croissante.
d'où $7^2 \leq x^2 \leq 10^2$

c'est-à-dire: $49 \leq x^2 \leq 100$

b) $x \in]-5; -1]$ - Sur l'intervalle $] -\infty; 0]$, la fonction carré est strictement décroissante.

d'où: $(-1)^2 \leq x^2 \leq (-5)^2$

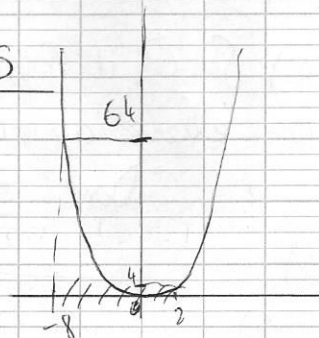
c'est-à-dire:

$$1 \leq x^2 \leq 25$$

c) $x \in [-8; 2]$

alors $x^2 \in [0; \max(8^2; 2^2)]$

donc: $0 \leq x^2 \leq 64$



3) Par lecture graphique, S a pour coordonnées $(3; 5)$

La forme canonique de f est donnée par:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ où } (\alpha; \beta) : \text{coordonnées de S}$$

d'où $f(x) = a(x - 3)^2 + 5$

Or, par lecture graphique, $f(0) = -4$

$$\text{N'ai: } a(0-3)^2 + 5 = -4$$

$$\Leftrightarrow 9a + 5 = -4$$

$$\Leftrightarrow 9a = -9$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{9}{9} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(x) &= -(x-3)^2 + 5 \\ &= -(x^2 - 6x + 9) + 5 \\ &= -x^2 + 6x - 9 + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{f(x) = -x^2 + 6x - 4}$$

Exercice (3): $A(5; -1)$ $B(4; 4)$ $C(-1; 3)$ $D(0; -2)$

1) a) M milieu de $[AC]$:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } \underline{M(2; 1)}$$

b) N milieu de $[BD]$:

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } \underline{N(2; 1)}$$

c) $[AC]$ et $[BD]$ sont les deux diagonales du quadrilatère $ABCD$
Or, elles se coupent en leur milieu.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme

2)

$$\begin{aligned} \text{a) } AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-5)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{1+25} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{25+1} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{16+36} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

(5)

$$BD^2 = 52 \quad \text{et} \quad AB^2 + AD^2 = 26 + 26 = 52$$

$$\text{D'où} \quad BD^2 = AB^2 + AD^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A

2) Le parallélogramme ABCD possède un angle droit
donc ABCD est un rectangle

3) D'après les calculs en 2a), $AB = \sqrt{26} = AD$

~~Donc~~ Le rectangle ABCD a donc deux côtés consécutifs égaux.

Par conséquent: ABCD est un carré

Exercice (4):

$$\begin{cases} f(x) = -2(x-3)^2 + 1 \\ g(x) = x^2 + 6x + 8 \\ h(x) = 3 - (x-1)^2 \end{cases}$$

• $g(x) = x^2 + 6x + 8$, avec $a = 1 > 0$

d'où la parabole représentant g est orientée vers le haut.

Or, P_1 est la seule parabole orientée vers le haut.

Donc: P_1 représente g

• $f(x) = -2(x-3)^2 + 1$ (c'est la forme canonique de f)
Par identification avec $a(x-\alpha)^2 + \beta$, on en déduit que:

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ a = -2 < 0 \end{cases} \quad \text{d'où } S(3; 1)$$

Or, la seule parabole dont le sommet a pour coordonnées $(3; 1)$ est la P_3

Donc: P_3 représente f

Par conséquent: P_2 représente h (son sommet est bien de coordonnées $(1; 3)$)